

# STUDI NUMERIK STRUKTUR *LINEAR ELASTICITY* MENGUNAKAN *DOMAIN DECOMPOSITION METHOD (DDM)*

Agung Premono

Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Negeri Jakarta

Jl. Rawamangun Muka Jakarta 13220

e-mail : premono.agung@gmail.com

## ABSTRAK

Permasalahan *boundary value* sering diselesaikan dengan metode numerik yang dibangun dengan basis matrik. Seiring berkembangnya kompleksitas produk, maka matrik yang disusun dalam menyelesaikan masalah *boundary value* juga semakin kompleks. Salah satu teknik komputasi untuk menyelesaikan masalah *boundary value* adalah dengan implementasi parallel komputasi. Makalah ini ditulis untuk mengimplementasikan proses parallel komputasi, yang disebut dengan *Domain Decomposition Method (DDM)* pada metode elemen hingga (MEH). Studi yang diambil adalah permasalahan linear elasticity sederhana berupa batang cantilever. Adventure, sebuah open source software, digunakan untuk menganalisis metode elemen hingga dengan DDM. Hasil analisis tersebut divalidasi dengan perhitungan matematika dan analisis metode elemen hingga biasa (tanpa DDM) menggunakan MSC Marc. Hasil analisis menunjukkan bahwa analisis MEH dengan implementasi DDM meningkatkan ketelitian hasil analisis dibandingkan dengan perhitungan MEH biasa.

**Kata Kunci :** *Komputasi parallel, Domain Decomposition Method (DDM), Adventure, Metode Elemen Hingga, Linear Elasticity*

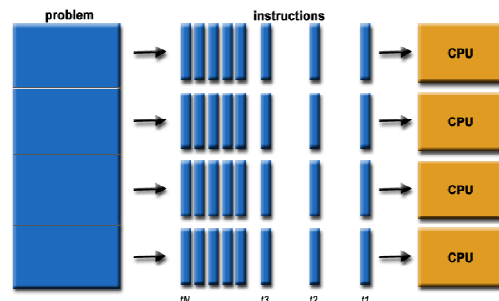
## 1. PENDAHULUAN

Metode elemen hingga merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menganalisis maupun merencanakan berbagai masalah teknik. Seiring dengan berkembangnya penggunaan komputer dalam desain mesin, maka desain mesin saat ini memiliki bentuk yang lebih kompleks. Dengan desain yang makin kompleks, maka analisis desain menggunakan elemen hingga menyebabkan penyelesaian matrik yang sangat besar. Kondisi matrik yang sangat banyak tersebut, maka kemungkinan akan terjadinya *illcondition*. Kondisi inilah yang akhirnya menyebabkan diciptakannya *Domain Decomposition Method (DDM)*.

Dalam permasalahan yang kompleks, banyak perhitungan yang melibatkan perhitungan matematika, atau analisis yang membutuhkan waktu yang sangat lama. Komputasi parallel menyediakan sebuah cara untuk menyelesaikan permasalahan yang kompleks dengan adanya teknologi jaringan yang digunakan sebagai media untuk

komunikasi antar computer yang digunakan dalam perhitungan tersebut. Secara ringkasnya, komputasi parallel ini adalah sebuah bentuk komputasi yang bisa melakukan perhitungan yang kompleks secara simultan. Konsep ini diilustrasikan pada gambar 1.

Walaupun komputasi parallel ini sudah dilakukan untuk menganalisis berbagai kasus teknik di berbagai negara, namun teknik ini masih belum banyak digunakan di Indonesia. Hanya sedikit peneliti di Indonesia yang tertarik untuk mengembangkan teknik komputasi parallel untuk menyelesaikan permasalahan teknik. Untuk itulah, paper ini ditulis untuk memperkenalkan *Domain Decomposition Method (DDM)* sebagai salah satu teknik komputasi parallel kepada pembaca sebagai salah satu metode yang sangat handal untuk memecahkan permasalahan teknik yang cukup kompleks. Sebagai bahan pembahasan pada paper ini, digunakan kasus linear elasticity.



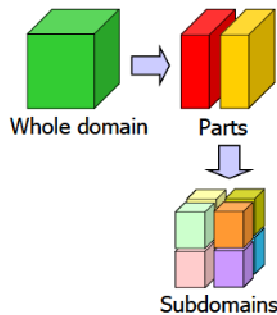
Gambar 1 Komputasi Paralel[1]

## 1. DASAR TEORI

### 2.1. Domain Decomposition Method (DDM)

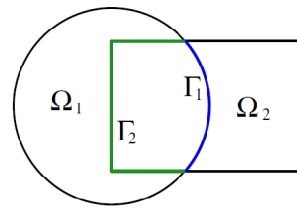
Domain decomposition method (DDM) adalah sebuah metode untuk menyelesaikan boundary value problem dengan membagi domain yang memiliki kompleksitas menjadi beberapa domain yang lebih simple dimana dengan pembagian tersebut, persamaan yang kompleks dapat

diselesaikan[2]. Metode ini diilustrasikan di gambar 2. Pendekatan domain decomposition tersebut telah menghasilkan level tertinggi dalam penyelesaian persamaan differensial dengan metode numeric menggunakan system parallel. Kelebihan utama DDM adalah meningkatnya kapasitas proses parallel komputasi dengan menggunakan perlakuan komputasi local dan dapat menganalisis geometri yang kompleks. Masing-masing permasalahan dihubungkan dengan subdomain yang akan dikoneksikan dengan perangkat komputasi yang berbeda. Selain itu, DDM dapat mengurangi waktu komputasi. [3]

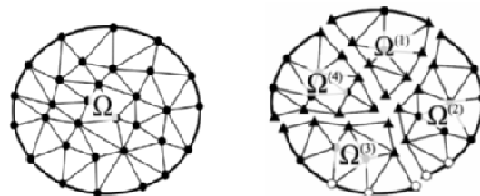


Gambar 2 Struktur DDM[3]

Secara matrik, DDM membagi matrik menjadi submatrik. Pendekatan penyelesaian dengan metode DDM diklasifikasikan menjadi dua yaitu : overlapping dan non-overlapping DDM. Secara diagramatis, kedua pendekatan tersebut diilustrasikan pada gambar 3 dan 4 untuk overlapping dan non-overlapping. Pendekatan yang digunakan pada tulisan ini adalah non-overlapping sehingga pembahasan penyelesaian matrik DDM menggunakan pendekatan tersebut.



Gambar 3 Overlapping DDM [4]



Gambar 4 Non-overlapping DDM [5]

Sebuah persamaan linear pada sebuah polyhedral domain  $\Omega$  didefinisikan dengan :

$$Ku = f \quad (1)$$

Dimana  $K$  adalah koefisien matrik,  $u$  adalah vector yang dicari, dan  $f$  adalah vector beban yang diketahui. Matrik  $K$  adalah matrik positif definit.

Polyhedral domain  $\Omega$  dibagi menjadi beberapa non-overlapping subdomain  $\Omega^{(i)}$ , sehingga persamaan polyhedral domain akan menjadi :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega^{(i)} \quad (2)$$

Dimana superscript (i) mengacu kepada subdomain  $\Omega^{(i)}$ . Dengan menata kembali system persamaan linear ke dalam beberapa subdomain, maka persamaan (1) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut.

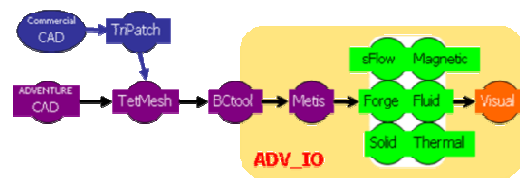
$$\begin{bmatrix} K_U^{(1)} & 0 & \dots & 0 & K_{UB}^{(1)} R_B^{(1)} \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & K_U^{(N)} & K_{UB}^{(N)} R_B^{(N)} \\ R_B^{(1)T} K_{UB}^{(1)T} & \dots & \dots & R_B^{(N)T} K_{UB}^{(N)T} & \sum_{i=1}^N R_B^{(i)T} K_{BB}^{(i)} R_B^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_U^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_U^{(N)} \\ u_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_U^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_U^{(N)} \\ \sum_{i=1}^N R_B^{(i)T} f_B^{(i)} \end{bmatrix}$$

### 2.2. Adventure Project [6]

ADVENTURE\_Project yang kemudian lebih dikenal dengan nama Adventure adalah sebuah perangkat lunak metode elemen hingga dengan menggunakan prinsip domain decomposition method (DDM) yang ditujukan untuk menyelesaikan persamaan differensial

dan mensimulasikan masalah teknik. Adventure memiliki keunggulan untuk dapat menganalisis masalah teknik yang memiliki model tak beraturan dan memiliki 10 ribu sampai jutaan derajat kebebasan, selain tentunya keunggulan utama perangkat lunak tersebut adalah gratis.

Adventure dikembangkan oleh beberapa peneliti dari berbagai kampus di Jepang dan menyediakan berbagai modul solver pada tahap processing yang dapat menganalisis berbagai kasus teknik seperti fluida, solid, thermal, magnetic. Selain itu, pada tahap pre-processing, Adventure menyediakan tool untuk membuat model (Adventure CAD), melakukan proses meshing (TetMesh), memberikan kondisi batas (BCTool) dan Metis yang berfungsi untuk memecah domain menjadi subdomain dengan jumlah sesuai masukan pengguna. Untuk tahap post-processor, Adventure dapat divisualisasikan dengan berbagai open source software. Adapun secara grafik, tahapan komputasi Adventure dapat dilihat pada gambar 5.



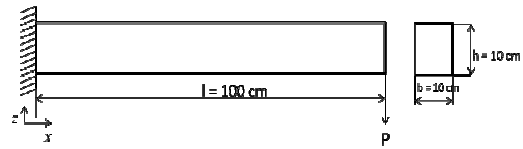
Gambar 5 Struktur Adventure[6]

### 2.3. Linear Elasticity

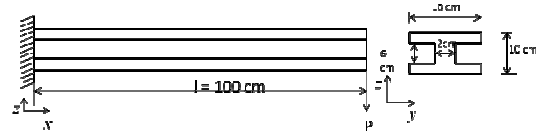
Linear elasticity adalah sifat material yang masih mematuhi hukum Hooke yang merumuskan bahwa tegangan ( $\sigma$ ) berbanding lurus dengan regangan ( $\epsilon$ ) dan modulus elastisitas ( $E$ ). Secara matematis hubungan tersebut dituliskan dengan persamaan  $\sigma = \epsilon E$ . Secara diagramatis, sifat material ini terletak pada daerah elastis dalam diagram tegangan-regangan. Material yang dikenai beban pada daerah elastis, akan kembali ke bentuk semula ketika beban dihilangkan.

### 2. Model dan Metodologi

Model yang digunakan dalam studi ini adalah struktur cantilever yang bersifat elastis. Ada dua model yang digunakan, yaitu cantilever dengan profil kotak pejal dan cantilever dengan profil I yang memiliki dimensi seperti yang terlihat pada gambar 4 dan 5.



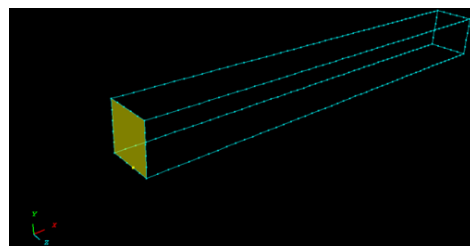
Gambar 6 Cantilever dengan profil kotak



Gambar 7 Cantilever dengan profil I

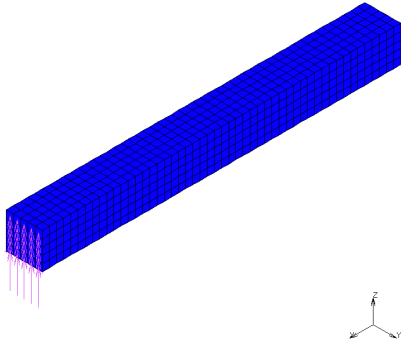
Sesuai dengan tujuan awal penelitian ini yaitu untuk implementasi metode DDM pada kasus linear elastis, maka komputasi dilakukan pada dua perangkat lunak yang berbeda yaitu : (1) perangkat lunak Metode Elemen Hingga berbasis DDM, yaitu Adventure Solid; dan (2) perangkat lunak komersial MSC Marc yang melakukan analisis menggunakan Metode Elemen Hingga biasa. Tujuan penggunaan MSC Marc adalah sebagai alat validasi dari solver Adventure Solid. Hasil dari analisis Adventure akan dibandingkan dengan komputasi yang dilakukan MSC Marc. Selain divalidasi dengan hasil perhitungan yang dilakukan oleh MSC Marc, hasil komputasi berbasis DDM tersebut juga divalidasi dengan penyelesaian empiris.

Model yang dibuat menggunakan AdventureCAD dapat dilihat pada gambar 6, yang merupakan model untuk struktur cantilever batang kotak pejal. Model pada gambar tersebut sebenarnya telah memasuki tahapan meshing dimana titik yang terdapat pada model adalah node hasil proses meshing yang dilakukan oleh Adventure TetMesh. Mesh yang digunakan pada model tersebut adalah tetrahedral mesh. Kondisi constraints diilustrasikan dengan warna berbeda yang terletak pada sisi kiri model. Warna tersebut menandakan kondisi penjepitan seperti yang terdapat pada gambar 4.



Gambar 8 Model cantilever profil kotak menggunakan Adventure

Untuk model yang dibuat pada MSC.Marc, dapat dilihat pada gambar 9. Pada model tersebut, hexahedral mesh digunakan pada proses meshing, sehingga terjadi perbedaan jumlah node dan elemen dengan yang dibuat pada Adventure TetMesh.



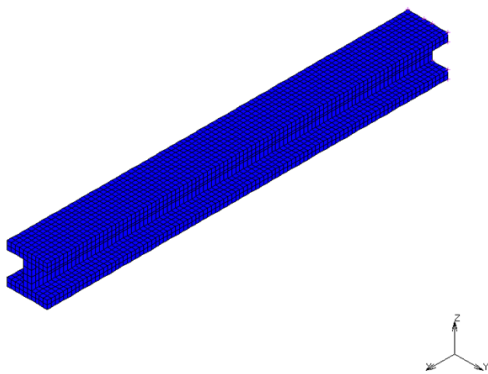
Gambar 9 Model cantilever profil kotak menggunakan MSC Marc

Seluruh model dalam simulasi ini diberikan gaya dan material yang sama. Untuk gaya diberikan gaya luar sebesar 20 N, percepatan gravitasi pelat pintusebesar 9,8 m/s<sup>2</sup> dan massa pelat pintu sebesar 13,14 kg. Bahan yang digunakan adalah steel dengan sifat mekanik seperti pada tabel 2.

Tabel 1 Properties Material [7]

Steel	
Young's Modulus	2.1e+005 MPa
Poisson's Ratio	0.3
Mass Density	7.85e-006 kg/mm <sup>3</sup>
Tensile Yield Strength	207.0 MPa

Model cantilever profil I yang ditampilkan dalam tulisan ini hanyalah yang menggunakan MSC Marc [8], seperti yang terlihat pada gambar 10.



Gambar 10 Model cantilever profil I menggunakan MSC Marc

### 3. Hasil dan Pembahasan

Dari proses pre-proses komputasi yang dilakukan, beberapa kondisi yang dapat dibandingkan dari penggunaan dua perangkat lunak yang menggunakan basis perhitungan berbeda adalah jumlah elemen dan jumlah node, yang dapat dilihat pada table 2.

Tabel 2 Hasil Pre-Proses Komputasi

	Adventure	MSC Marc
Jumlah elemen	7,500	1,250
Jumlah node	12,221	1,836
Tipe elemen	Quadratic Tetrahedral	Linear Hexahedral

Hasil proses pre-prosesing terlihat bahwa penggunaan tipe elemen yang berbeda memiliki efek yang sangat besar pada elemen dan node yang dihasilkan. Perbedaan elemen yang digunakan pada proses komputasi akan memiliki efek terhadap hasil yang diperoleh. Adapun perbedaan hasil perhitungan displacement (perpindahan titik) maksimal dari kedua perangkat lunak tersebut dapat dilihat pada table 3.

Tabel 3 Hasil perhitungan displacement pada ketiga arah sumbu

	Adventure (mm)	MSC Marc (mm)
Displacement X max	3.934e-05	3.884e-05
Displacement Y max	1.233e-03	1.396e-05
Displacement Z max	1.906e-02	1.861e-02

Hasil perhitungan displacement pada arah Z maksimal secara empiris adalah 1.90476e-02[9].Melihat hasil diatas, maka perhitungan yang dilakukan dengan Adventure Solid berbasis Windows memiliki hasil yang lebih mendekati hasil perhitungan empiris.Untuk mengetahui eror yang dihasilkan antara empiris dengan numeric, maka dicari harga mutlak perbedaan nilai antara komputasi dan empiris. Dengan menggunakan prinsip ini, maka eror yang dihasilkan pada komputasi menggunakan Adventure Solid untuk displacement adalah 0,00124 dan untuk MSC.Marc 0,04376. Perbedaan nilai yang lebih kecil dihasilkan oleh Adventure. Kondisi ini sebagai efek dari penggunaan elemen quadratic tetrahedral yang memiliki node dan elemen yang lebih banyak sehingga menghasilkan proses komputasi yang lebih presisi atau eror yang lebih kecil.

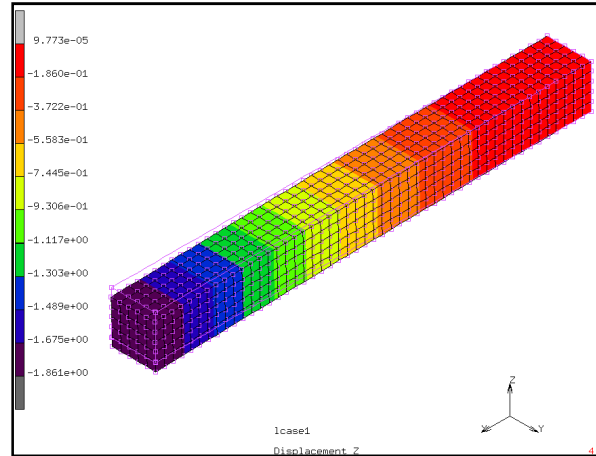
Untuk memastikan bahwa hasil komputasi Adventure Solid, maka hasil perhitungan

tegangan dibandingkan dengan hasil komputasi yang dihasilkan oleh MSC Marc. Adapun rekapitulasi hasil perhitungan tegangan yang dilakukan oleh Adventure Solid dan MSC Marc dapat dilihat pada table 4.

Tabel 4 Hasil perhitungan tegangan cantilever profil kotak

	Adventure (N/mm <sup>2</sup> )	MSC Marc (N/mm <sup>2</sup> )
Stress 11 max	8.566 e+03	7.612 e+03
Stress 22 max	3.676 e+03	3.241 e+03
Stress 33 max	3.674 e+03	3.187 e+03
Stress 12 max	1.500 e+03	1.170 e+03
Stress 23 max	1.528 e+03	1.758 e+03
Stress 13 max	2.026 e+03	2.510 e+03

Sehubungan tidak adanya perhitungan empiris yang dihasilkan pada perhitungan tegangan maksimal baik tegangan normal arah X, Y, maupun Z, begitupun tegangan gesernya, maka validasi hasil pada proses perhitungan tegangan dilakukan dengan membandingkan hasil perhitungan yang diperoleh Adventure Solid dengan hasil yang diperoleh MSC Marc. Langkah ini dilakukan karena perhitungan yang dilakukan Adventure Solid merupakan implementasi metode baru dalam Metode Elemen Hingga yaitu DDM, sedangkan komputasi yang dilakukan MSC Marc menggunakan MEH biasa. Dari table 4 dapat dilihat bahwa perbedaan hasil yang diperoleh masih dibawah 10 %. Adapun visualisasi displacement yang dapat ditampilkan pada makalah ini adalah displacement pada arah Z yang dihasilkan dari MSC Marc seperti pada gambar 11.



Gambar 11 Kontur displacement arah Z yang dihasilkan oleh MSC Marc

Analisis model berikutnya yaitu cantilever profil I menggunakan tahapan yang sama dengan struktur cantilever kotak. Untuk jumlah elemen dan node yang dihasilkan dari cantilever profil I dari tahapan pre-proses komputasi untuk kedua perangkat lunak dapat dilihat pada table 5.

Tabel 5 Hasil Pre-Proses Komputasi

	Adventure	MSC Marc
Jumlah elemen	28,800	4,800
Jumlah node	49,245	7,575
Tipe elemen	Quadratic Tetrahedral	Linear Hexahedral

Adapun hasil komputasi untuk displacement pada ketiga sumbu dapat dilihat pada table 6. Sedangkan harga empiris untuk displacement arah sumbu Z pada struktur tersebut sebesar 2.3027e-02 mm [9].

Tabel 6 Hasil perhitungan displacement cantilever profil I pada ketiga arah sumbu

	Adventure (mm)	MSC Marc (mm)
Displacement X max	8.162e-04	8.969e-04
Displacement Y max	1.233e-02	1.225e-02
Displacement Z max	2.554e-02	2.556e-02

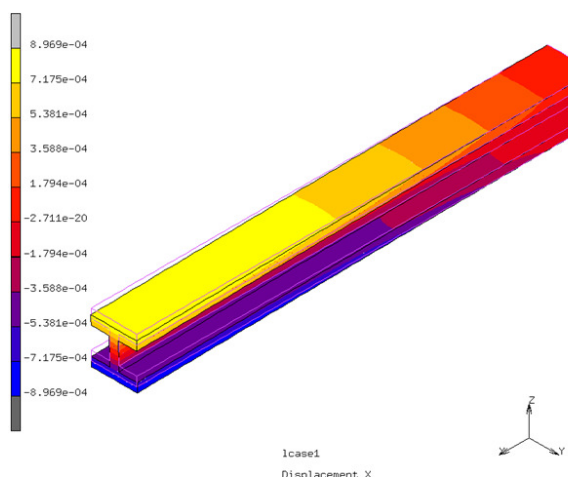
Dari hasil selisih antara harga empiris dengan hasil komputasi dari kedua perangkat lunak seperti yang ditabulasikan pada table 6, maka terlihat bahwa Adventure Solid memiliki selisih nilai yang lebih kecil. Dengan demikian maka, proses komputasi yang dilakukan dengan Metode Elemen Hingga dengan DDM memiliki hasil yang lebih presisi.

Sebagai tambahan validasi, maka hasil komputasi tegangan struktur cantilever profil I yang dilakukan oleh Adventure Solid dibandingkan dengan hasil komputasi yang dilakukan oleh MSC Marc. Adapun hasilnya dapat dilihat pada table 7.

Tabel 7 Hasil perhitungan tegangan cantilever profil I

	Adventure (N/mm <sup>2</sup> )	MSC Marc (N/mm <sup>2</sup> )
Stress 11 max	5.691 e+03	5.607 e+03
Stress 22 max	2.442 e+03	2.375 e+03
Stress 33 max	2.442 e+03	2.391 e+03
Stress 12 max	1.382 e+03	1.081 e+03
Stress 23 max	3.760 e+02	2.637 e+02
Stress 13 max	1.208 e+03	9.043 e+02

Terbatasnya perhitungan empiris untuk tegangan normal dan geser pada semua sumbu untuk kasus ini, maka validasi dilakukan hanya mengacu kepada nilai yang dihasilkan oleh MSC Marc dengan asumsi bahwa nilai yang dihasilkan dengan Metode Elemen Hingga biasa yang dilakukan oleh MSC Marc sudah valid mengingat validitas perangkat lunak tersebut sudah pasti. Adapun visualisasi displacement arah Z untuk profil I dapat dilihat pada gambar 12. Visualisasi tersebut dihasilkan oleh MSC Marc.



Gambar 11 Kontur displacement arah Z yang dihasilkan oleh MSC Marc

Kesulitan yang dihadapi sampai saat ini untuk penggunaan Adventure Solid adalah visualisasi kontur perhitungan yang memerlukan perangkat lunak lain sehingga menyulitkan bagi pengguna yang belum familiar dengan perangkat lunak berbasis linux.

#### 4. Kesimpulan

Dari hasil perhitungan dapat disimpulkan bahwa implementasi Domain Decomposition Method pada Metode Elemen Hingga untuk kasus linear elastisitas sudah dapat dilakukan oleh perangkat lunak Adventure Solid. Hasil komputasi yang dilakukan dengan MEH menggunakan DDM lebih presisi dibandingkan dengan komputasi MEH tanpa DDM, dimana pada perhitungan untuk cantilever profil kotak dengan analisis MEH menggunakan DDM menghasilkan displacement arah Z sebesar 1.9602e-02 mm dan MEH tanpa DDM sebesar 1.861e-02, dengan harga empiris untuk analisis pada kasus ini adalah 1.90476e-02 mm. Begitupun dengan cantilever profil I, dimana analisis MEH dengan DDM menghasilkan perpindahan arah Z sebesar 2.554e-02 mm dan MEH tanpa DDM menghasilkan angka 2.556e-02 mm, dengan perhitungan empiris sebesar 2.3027e-02 mm.

#### 5. Acknowledgement

Terima kasih penulis tujukan kepada Prof. Hiroshi Kanayama atas kesempatan yang diberikan untuk menggunakan perangkat lunak Adventure Solid dan MSC Marc di Laboratorium Komputasi Mekanika, Departemen Teknik Mesin, Kyushu University.

#### DAFTAR PUSTAKA

1. Quarteroni and A. Valli, "Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations", Oxford University Press, (1999).
2. A.M.M. Mukaddes, M. Ogino, H. Kanayama and R. Shioya, "A scalable balancing domain decomposition based preconditioner for large scale heat transfer problems", JSME International Journal Series B, Vol.49, pp.533-540 (2006).
3. B. Smith, P. Bjorstad and W. Gropp: "Domain Decomposition, Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations", Cambridge University Press, (1996).
4. B. I. Wohlmuth, "Discretization Methods and Iterative Solvers Based on Domain Decomposition", vol. 17. Berlin: Springer, (2001).

5. B. Després, “Méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes de propagation d’ondes en régime harmonique,” Ph.D dissertation, Paris, (1991).
6. <http://adventure.sys.t.u-tokyo.ac.jp>
7. Callister Jr, W.D., “Material Science and Engineering, An Introduction”, John Willey & Sons, Inc. Fifth Edition, (2000).
8. MSC Marc 2005
9. [http://cm.mech.kyushu-u.ac.jp/~ogino/z6om05in/PracticeCM\\_h23.html](http://cm.mech.kyushu-u.ac.jp/~ogino/z6om05in/PracticeCM_h23.html)