JMT (Jurnal Matematika dan Terapan) **4** (2) (2022), 27-34
https://doi.org/10.21009/jmt.4.2.4
e-ISSN: 2615-6792

Analisis Kestabilan Model SVIQR pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis

Else As Syavira[1, a)], Embay Rohaeti[1], Ani Andriyati[1]

[1] *Program Studi Matematika,Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan Alam,Universitas Pakuan*

Email: [a)]elseassyavira@gmail.com

Abstract

Tuberculosis is an infectious disease caused by the bacterium *Mycobacterium tuberculosis*. The problem of tuberculosis is still a problem that requires attention from the government. The SVIQR (*Suspectible, Vaccinated, Infected, Quarantined, Recovered*) model is a model that describes the spread of tuberculosis with vaccinations being carried out on susceptible individuals and quarantine in the form of hospitalization for individuals who have been declared infected. In this paper, we will discuss the stability of the fixed point contained in the SVIQR model, stability analysis is carried out by finding a fixed point that produces two fixed points then the fixed point is analyzed for stability using the *Routh-Hurwitz*. Based on the analysis of the stability of the fixed point with the *Routh-Hurwitz* it was found that the first fixed point was stable when tuberculosis was not epidemic and the second fixed point was stable when tuberculosis was epidemic.

Keywords: tuberculosis, SVIQR, basic reproduction number

Abstrak

Tuberkulosis merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis*. Permasalahan tuberkulosis masih menjadi masalah yang membutuhkan perhatian dari pemerintah. Model SVIQR (*Suspectible, Vaccinated, Infected, Quarantined, Recovered*) merupakan model yang menggambarkan penyebaran penyakit tuberkulosis dengan kondisi adanya vaksinasi yang dilakukan pada individu rentan dan adanya karantina berupa rawat inap pada individu yang telah dinyatakan terinfeksi. Pada penulisan ini akan dibahas kestabilan titik tetap yang terdapat dalam model SVIQR, analisis kestabilan dilakukan dengan mencari titik tetap yang menghasilkan dua titik tetap selanjutnya titik tetap tersebut dianalisis kestabilannya dengan kriteria *Routh-Hurwitz*. Berdasarkan analisis kestabilan titik tetap dengan kriteria *Routh-Hurwitz* dihasilkan bahwa titik tetap pertama stabil pada saat penyakit tuberkulosis tidak mewabah dan tititk tetap kedua stabil pada saat penyakit tuberkulosis mewabah.

Kata-kata kunci: tuberkulosis, SVIQR, bilangan reproduksi dasar

PENDAHULUAN

Menurut Nisa (2017), Tuberkulosis (TB) adalah suatu penyakit menular yang di sebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis* yang dapat menyerang paru-paru, namun bisa juga menyebar ke tulang, kelenjar getah bening, sistem saraf pusat, jantung, dan organ lainnya. Bakteri tersebut dapat ditularkan melalui saluran Udara. Permasalahan tuberkulosis masih menjadi masalah yang membutuhkan perhatian dari pemerintah. Upaya pemerintah untuk mencegah penyebaran Penyakit tuberkulosis yaitu memberikan vaksin BCG (*Bacille Calmette Guerin*) dan karantina berupa rawat inap yang dilakukan pihak rumah sakit kepada penderita yang terinfeksi.

Diterima: 29 Juli 2019, Direvisi: 24 Agustus 2022, Disetujui: 24 Agustus 2022

Model SVIQR (*Suspectible, Vaccinated, Infected, Quarantined, Recovered*) merupakan model yang menggambarkan penyebaran penyakit tuberkulosis dengan kondisi adanya vaksinasi yang dilakukan pada individu rentan dan adanya karantina pada individu yang telah dinyatakan terinfeksi. Dalam penelitian Chen S *et al* (2018) telah dibahas analisis model SVIQR dengan menggunakan model stokastik, sedangkan dalam tulisan ini akan dibahas model SVIQR pada penyebaran penyakit tuberkulosis dengan adanya penambahan parameter menggunakan model deterministik.

LANDASAN TEORI

Tuberkulosis

Tuberkulosis merupakan penyakit menular langsung yang disebabkan oleh kuman *mycobacterium tuberculosis*. Sebagian besar kuman menyerang paru-paru melalui saluran pernapasan, tetapi juga dapat mengenai organ tubuh lainya. Tuberkulosis aktif adalah kondisi dimana tubuh penderita bakteri tuberkulosis bersifat aktif berkembang biak dan menimbulkan gejala penyakit tuberkulosis. Orang yang terinfeksi secara aktif disebut penderita penderita tuberkulosis aktif. Penderita tuberkulosis aktif dapat menularkan penyakit tuberkulosis kepada orang yang rentan terhadap penyakit tuberkulosis.

Persamaan Diferensial dan Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan suatu persamaan matematika yang memuat turunan terhadap satu atau lebih dari variabel tidak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Berdasarkan tipenya persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang hanya memuat satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat dua atau lebih variabel bebas. Bentuk umum dari persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut:

$$y' = f(x), x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang terdiri dari dua atau lebih persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; t), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; t), \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t), \end{aligned} \tag{2}$$

Model SVIQR

Model Epidemik SVIQR (*suspectible, Vaccinated, Infected, Quarantined, Recovered*) merupakan model yang menggambarkan penyebaran penyakit menular dengan vaksinasi dan karantina. Model penyebaran penyakit SVIQR dibagi kedalam lima kelompok yaitu *suspectible* yang merupakan individu rentan, *Vaccinated* yang merupakan individu yang telah divaksin, *Infected* yang merupakan individu yang telah terinfeksi, *Quarantined* yang merupakan individu yang dikarantina, dan *Recovered* yang merupakan individu yang sembuh. kompartemen model SVIQR dapat dilihat pada Gambar 1.

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor taknol x pada $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen (eigen vector) dari matriks A. Jika berlaku $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ, maka λ disebut nilai eigen (*eigen value*) dari matriks A.

Persamaan berlaku $Ax = \lambda x$ dapat ditulis dalam bentuk

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{3}$$

Sistem persamaan (3) akan mempunyai penyelesaian nontrivial jika dan hanya jika

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{4}$$

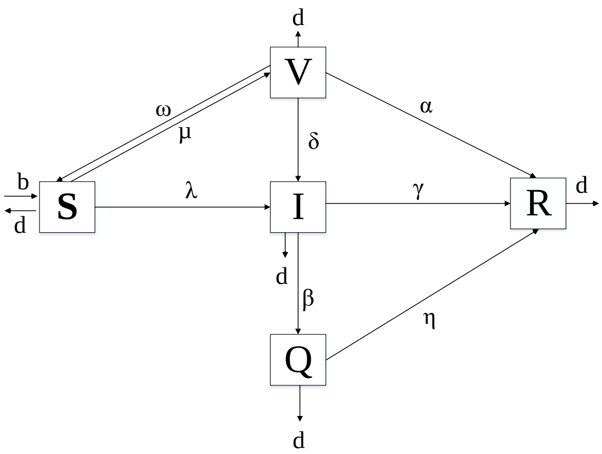
Jika determinan pada persamaan (4) diuraikan, maka akan didapatkan suatu polinom berderajat ke-n dalam peubah λ.

$$p(\lambda) = \det\,(A - \lambda I) \tag{5}$$

Matriks Jacobian

Misalkan diberikan fungsi diferensial $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem persamaan (2), maka matriks Jacobian J_f dari sistem persamaan (2) didefinisikan sebagai berikut :

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$



GAMBAR 1. Kompartemen Model SVIQR

Titik Tetap dan Kestabilan Titik Tetap

Menurut Narsingani (2017), misalkan diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) \tag{6}$$

maka jika $F(x^*) = 0$ titik x^* disebut titik kritis atau titik tetap atau titik ekuilibrium dari sistem persamaan (6).

Kestabilan titik tetap adalah sebuah keadaan dari suatu sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial linier sebagai berikut

$$\dot{x} = Ax \tag{7}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari sistem persamaan (7) dapat dihitung dengan cara sebagai berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{8}$$

Persamaan karakteristik dari sistem persamaan (7) dapat juga ditulis menjadi

$$a\lambda^2 - b\lambda + c = 0 \tag{9}$$

Berdasarkan persamaan (9) dapat di hitung nilai-nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \tag{10}$$

Kestabilan suatu titik tetap dapat diperiksa dari akar-akar karakteristik atau nilai eigen dengan menyelesaikan persamaan sistem (10). Berdasarkan nilai dari akar akar karakteristik $\lambda 1$ dan $\lambda 2$ diatas maka terdapat tiga kasus yang bergantung pada nilai $D = b^2 - 4ac$.

1. Pada kasus $D > 0$, apabila kedua nilai eigen real berbeda $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ titik tetap mempunyai tiga sifat yaitu sebagai berikut.
   i. Titik tetap bersifat simpul stabil apabila kedua nilai eigen negatif $(\lambda_1 < 0)$ dan $(\lambda_2 < 0)$.
   ii. Titik tetap bersifat simpul tidak stabil apabila kedua nilai eigen positif $(\lambda_1 > 0)$ dan $(\lambda_2 > 0)$.
   iii. Titik tetap bersifat sadel apabila nilai eigen bersifat positif dan negatif $(\lambda_1 > 0)$ dan $(\lambda_2 < 0)$ atau $(\lambda_1 < 0)$ dan $(\lambda_2 > 0)$
2. Pada kasus $D = 0$, apabila kedua nilai eigen real sama $(\lambda_1 = \lambda_2)$ titik tetap mempunyai dua sifat yaitu sebagai berikut.
   i. Titik tetap bersifat stabil apabila kedua nilai eigen negatif $(\lambda_1 < 0)$ dan $(\lambda_2 < 0)$.
   ii. Titik tetap bersifat tidak stabil apabila kedua nilai eigen positif $(\lambda_1 > 0)$ dan $(\lambda_2 > 0)$.
3. Pada kasus $D < 0$, apabila kedua nilai eigen merupakan bilangan imaginer $\left(\lambda_{1,2} = a \pm ib\right)$ titik tetap mempunyai tiga sifat yaitu sebagai berikut.
   i. Titik tetap bersifat spiral tak stabil apabila nilai $a > 0$ (bagian realnya positif.
   ii. Titik tetap bersifat spiral stabil stabil apabila nilai $a < 0$ (bagian realnya negatif.
   iii. Titik tetap bersifat selalu stabil apabila nilai $a = 0$ nilai eigen merupakan imaginer murni.

Bilangan Reproduksi Dasar ($\mathfrak{R}_0$)

Bilangan reproduksi dasar adalah rata-rata banyaknya individu yang rentan terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang telah terinfeksi bila individu yang telah terinfeksi tersebut masuk ke dalam kelompok individu yang seluruhnya masih rentan.. Secara umum bilangan $\mathfrak{R}_0$ mempunyai tiga kemungkinan kondisi yang akan terjadi yaitu :

1. Jika $\mathfrak{R}_0 < 1$, jumlah individu terinfeksi akan menurun, sehingga penyakit akan menghilang dan tidak menjadi wabah.
2. Jika $\mathfrak{R}_0 = 1$, jumlah individu terinfeksi konstan, sehingga penyakit akan menetap.
3. Jika $\mathfrak{R}_0 > 1$, jumlah individu terinfeksi akan meningkat, sehingga penyakit akan menjadi wabah.

Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria *Routh-Hurwitz* merupakan suatu metode yang digunakan untuk menentukan apakah suatu sistem linear stabil atau tidak dengan memeriksa lokasi dari akar persamaan karakteristik sistem. Diberikan suatu persamaan karakteristik sistem orde-n yang ditulis dalam bentuk sebagai berikut :

$$q(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{11}$$

Pada persamaan karakteristik yang telah ditentukan, koefisien persamaan karakteristik yang memuat nilai eigennya kemudian dilakukan penyesuaian dengan kriteria Routh-Hurwitz. Adapun kriteria Routh-Hurwitz untuk $n = 5$ yaitu $a_1 > 0$, $a_1a_2 - a_3 > 0$, dan $a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 > 0$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembentukan Model SVIQR pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis

Pembentukan model SVIQR pada penyebaran penyakit tuberkulosis dilakukan dengan pembuatan asumsi terlebih dahulu dan pembentukan kompartemen model. Selanjutnya, dilakukan penambahan parameter yang sesuai pada masing-masing kompartemen seperti pada Gambar 2.

Berdasarkan kompartemen, model penyebaran penyakit tuberkulosis dengan vaksinasi dan karantina dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial sebagai berikut :

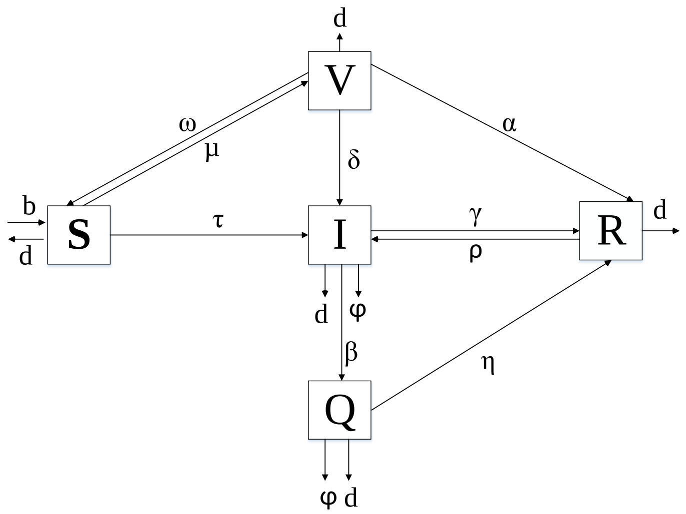
$$\frac{dS}{dt} = b + \omega V - \tau SI - dS - \mu S$$

$$\frac{dV}{dt} = \mu S - \delta VI - dV - \alpha V - \omega V$$

$$\frac{dI}{dt} = \tau SI + \delta VI + \rho R - \beta I - \gamma I - dI - \varphi I$$

$$\frac{dQ}{dt} = \beta I - \eta Q - dQ - \varphi Q$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \eta Q + \alpha V - \rho R - dR$$



GAMBAR 2. Kompartemen Model SVIQR Penyakit Tuberkulosis

Titik Tetap Model SVIQR Pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis

Titik tetap pertama didapat dengan menyelesiakan persamaan sehingga diperoleh titik tetap pertama sebagai berikut :

$$T_1 = (S_0, V_0, I_0, Q_0, R_0,)$$

dengan

$$S_0 = \frac{-b(d+\alpha+\omega)}{\omega\mu - (d+\mu)(d+\alpha+\omega)}$$

$$V_0 = \frac{-\mu b}{\omega\mu - (d+\mu)(d+\alpha+\omega)}$$

$$I_0 = 0$$

$$Q_0 = 0$$

$$R_0 = \frac{-\alpha\mu b}{(\omega\mu - (d+\mu)(d+\alpha+\omega))(\rho+d)}$$

Langkah selanjutnya yaitu mencari titik tetap kedua dengan $S \neq 0, V \neq 0, I \neq 0, Q \neq 0, R \neq 0$, titik tetap kedua yang diperoleh yaitu sebagai berikut :

$$T_2 = (S^*, V^*, I^*, Q^*, R^*)$$

$$T_2 = \left(\begin{array}{l} \dfrac{b(\delta I^* + D)}{(\delta I^* + D)(\tau I^* + C) - \omega\mu}, \dfrac{\mu b}{(\tau I^* + C)(\delta I^* + D) - \mu\omega}, \\ I^*, \dfrac{\beta I^*}{F}, -\dfrac{I^*}{\rho}\left(\dfrac{\tau b(\delta I^* + D) + \mu b \delta}{(\delta I^* + D)(\tau I^* + C) - \omega\mu} - G \right) \end{array} \right)$$

dengan

$$C = d + \mu$$

$$D = d + \alpha + \omega$$

$$E = \rho + d$$

$$F = \eta + d + \varphi$$

$$G = \beta + \gamma + d + \varphi$$

dan I^* adalah akar positif dari $g(I) = A_1 I^3 + A_2 I^2 + A_3 I^1 + A_4$, dimana:

$$A_1 = \left(\frac{\gamma F + \eta\beta}{F} - \frac{EG}{\rho} \right)\delta\tau$$

$$A_2 = \left(\frac{\gamma F + \eta\beta}{F} - \frac{EG}{\rho}\right)(\delta C + \tau D) + \frac{E\tau b\delta}{\rho}$$

$$A_3 = \left(\frac{\gamma F + \eta\beta}{F} - \frac{EG}{\rho}\right)(DC - \mu\omega) + \frac{E(\tau bD + \mu b\delta)}{\rho}$$

$$A_4 = \alpha\mu b$$

Matriks Jacobian Model SVIQR Pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis

Sistem persamaan pada model SVIQR dilinierkan dengan menurunkan secara parsial masing-masing persamaan terhadap variabel S,V,I,Q,R kemudian hasil turunan disusun ke dalam suatu matriks jacobian J_T sebagai berikut :

$$J_T = \begin{bmatrix} -\tau I - C & \omega & -\tau S & 0 & 0 \\ \mu & -\delta I - D & -\delta V & 0 & 0 \\ \tau I & \delta I & \tau S + \delta V - G & 0 & \rho \\ 0 & 0 & \beta & -F & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma & \eta & -E \end{bmatrix}$$

Analisis Kestabilan Model SVIQR Pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis

Analisis kestabilan dilakukan terhadap titik tetap pertama dan titik tetap kedua. Langkah awal yang dilakukan yaitu dengan mensubsitusikan titik tetap pertama kedalam matriks J_T sehingga menghasilkan matriks J_{T1} sebagai berikut:

$$J_{T1} = \begin{bmatrix} -C & \omega & \dfrac{\tau bD}{\omega\mu - CD} & 0 & 0 \\ \mu & -D & \dfrac{\delta\mu b}{\omega\mu - CD} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\tau bD - \delta\mu b}{\omega\mu - CD} - G & 0 & \rho \\ 0 & 0 & \beta & -F & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma & \eta & -E \end{bmatrix}$$

Matriks jacobian J_{T1} yang telah diperoleh kemudian dicari persamaan karakteristiknya yang dapat diperoleh melalui persamaan persamaan $\det(\lambda I - J_{T1}) = 0$ sebagai berikut :

$$\det\begin{bmatrix} -C - \lambda & \omega & \dfrac{\tau bD}{\omega\mu - CD} & 0 & 0 \\ \mu & -D - \lambda & \dfrac{\delta\mu b}{\omega\mu - CD} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\tau bD - \delta\mu b}{\omega\mu - CD} - G - \lambda & 0 & \rho \\ 0 & 0 & \beta & -F - \lambda & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma & \eta & -E - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 = 0 \tag{12}$$

maka nilai eigen merupakan akar-akar dari polynomial berikut :

$$q(\lambda) = \lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 = 0$$

Langkah selanjutnya yaitu mensubsitusikan titik tetap kedua kedalam matriks J_T sebagai berikut:

$$J_{T2} = \begin{bmatrix} -\tau I^* - C & \omega & \dfrac{-\tau b(\delta I^* + D)}{(\delta I^* + D)(\tau I^* + C) - \omega\mu} & 0 & 0 \\ \mu & -\delta I^* - D & \dfrac{-\delta\mu b}{(\tau I^* + C)(\delta I^* + D) - \mu\omega} & 0 & 0 \\ \tau I & \delta I^* & \left(\dfrac{\tau b(\delta I^* + D) + \delta\mu b}{(\delta I^* + D)(\tau I^* + C) - \omega\mu}\right) - G & 0 & \rho \\ 0 & 0 & \beta & -F & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma & \eta & -E \end{bmatrix}$$

Selanjutnya matriks jacobian J_{T2} yang telah diperoleh akan diuji kestabilan titik tetapnya menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* dengan langkah awal mencari nilai eigen dari matriks J_{T2}. Nilai eigen λ dapat diperoleh melalui persamaan $\det(\lambda I - J_{T2}) = 0$ sebagai berikut :

$$\det\begin{bmatrix} -\tau I^* - C - \lambda & \omega & \dfrac{-\tau b\left(\delta I^* + D\right)}{\left(\delta I^* + D\right)\left(\tau I^* + C\right) - \omega\mu} & 0 & 0 \\ \mu & -\delta I^* - D - \lambda & \dfrac{-\delta\mu b}{\left(\tau I^* + C\right)\left(\delta I^* + D\right) - \mu\omega} & 0 & 0 \\ \tau I & \delta I^* & \left(\dfrac{\tau b\left(\delta I^* + D\right) + \delta\mu b}{\left(\delta I^* + D\right)\left(\tau I^* + C\right) - \omega\mu}\right) - G - \lambda & 0 & \rho \\ 0 & 0 & \beta & -F - \lambda & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma & \eta & -E - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 = 0 \tag{13}$$

maka nilai eigen merupakan akar-akar dari polynomial berikut :

$$q(\lambda) = \lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 = 0$$

Analisis Kestabilan pada kondisi $\Re_0 < 1$

Titik tetap pertama dan kedua masing-masing dianalisis dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* pada saat kondisi $\Re_0 < 1$ yang artinya penyakit tidak akan menjadi wabah, Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz*, titik tetap akan stabil jika dan hanya jika nilai karakteristik memenuhi syarat $a_1 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 > 0$.

1. Analisis Titik Tetap Pertama

Uji kestabilan titik tetap pertama dilakukan berdasarkan nilai karakteristik pada persamaan (12). Berdasarkan perhitungan diperoleh $a_1 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 > 0$ pada saat kondisi $\Re_0 < 1$. Disimpulkan bahwa syarat kriteria *Routh-Hurwitz* untuk titik tetap pertama pada saat $\Re_0 < 1$ terpenuhi, sehingga titik tetap pertama T_1 stabil pada saat kondisi $\Re_0 < 1$.

2. Analisis Titik Tetap Kedua

Uji kestabilan titik tetap kedua dilakukan berdasarkan nilai karakteristik pada persamaan (13). Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan diperoleh $a_1 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 > 0$. Disimpulkan bahwa syarat untuk stabil terpenuhi.. Tahap selanjutnya yaitu membuktikan bahwa kestabilan titik tetap tersebut berada pada saat $\Re_0 < 1$, diketahui I^* adalah akar positif dari $g(I) = A_1 I^3 + A_2 I^2 + A_3 I^1 + A_4$ maka persamaan tersebut dapat diubah menjadi

$$g(I) = A_1 I^3 + A_2 I^2 + A_3 I^1 + A_5\left(1 - \Re_0\right)$$

dengan

$$A_5 = \frac{\alpha\mu b G\left(CD - \mu\omega\right)}{G\left(CD - \mu\omega\right) - \left(b\delta\mu + bD\tau\right)} > 0$$

keberadaan titik tetap kedua dengan I^* adalah akar real yang bernilai positif dari persamaan $g(I) = A_1 I^3 + A_2 I^2 + A_3 I^1 + A_5\left(1 - \Re_0\right)$ terpenuhi di $\Re_0 < 1$ jika A_5 bernilai negatif . Jadi berdasarkan perhitungan A_5 diperoleh bahwa $A_5 > 0$ maka titik tetap kedua tidak stabil di $\Re_0 < 1$.

Analisis Kestabilan Titik Tetap pada kondisi $\Re_0 > 1$

Titik tetap pertama dan kedua masing-masing dianalisis dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* pada saat kondisi $\Re_0 > 1$yang artinya penyakit mewabah, Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz*, titik tetap akan stabil jika dan hanya jika nilai karakteristik memenuhi syarat $a_1 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 > 0$.

1. Analisis Titik Tetap Pertama

Uji kestabilan titik tetap pertama dilakukan berdasarkan nilai karakteristik pada persamaan (12). Berdasarkan perhitungan diperoleh $a_1 < 0$, $a_1 a_2 - a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 > 0$ pada saat kondisi $\Re_0 > 1$. Disimpulkan bahwa syarat kriteria *Routh-Hurwitz* untuk titik tetap pertama pada $\Re_0 > 1$ tidak terpenuhi, sehingga titik tetap pertama T_1 tidak stabil pada $\Re_0 > 1$ yaitu kondisi.

2. Analisis Titik Tetap Kedua

Uji kestabilan titik tetap kedua dilakukan berdasarkan nilai karakteristik pada persamaan (13). Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan diperoleh $a_1 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 > 0$. Disimpulkan bahwa syarat untuk stabil terpenuhi. Tahap selanjutnya yaitu membuktikan bahwa kestabilan titik tetap tersebut berada pada saat $\Re_0 > 1$, diketahui I^* adalah akar positif dari $g(I) = A_1 I^3 + A_2 I^2 + A_3 I^1 + A_4$ maka persamaan tersebut dapat diubah menjadi

$$g(I) = A_1 I^3 + A_2 I^2 + A_3 I^1 + A_5 (1 - \Re_0)$$

dengan

$$A_5 = \frac{\alpha\mu bG(CD - \mu\omega)}{G(CD - \mu\omega) - (b\delta\mu + bD\tau)} > 0$$

keberadaan titik tetap kedua dengan I^* adalah akar real yang bernilai positif dari persamaan $g(I) = A_1 I^3 + A_2 I^2 + A_3 I^1 + A_5 (1 - \Re_0)$ terpenuhi di $\Re_0 > 1$ jika A_5 bernilai positif . Jadi berdasarkan perhitungan A_5 diperoleh bahwa $A_5 > 0$ maka titik tetap kedua stabil di $\Re_0 > 1$.

PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan Pembahasan dapat disimpulkan bahwa pada model SVIQR penyebaran penyakit tuberkulosis diperoleh dua titik tetap. Titik tetap pertama stabil di kondisi $\Re_0 < 1$ dan tidak stabil di kondisi $\Re_0 > 1$, hal ini menunjukkkan bahwa titik tetap pertama merupakan titik tetap bebas penyakit tuberkulosis karena stabil pada saat kondisi penyakit tuberkulosis tidak menjadi wabah, sedangkan titik tetap kedua tidak stabil di kondisi $\Re_0 < 1$ dan stabil di kondisi $\Re_0 > 1$, hal ini menunjukkkan bahwa titik tetap kedua merupakan titik tetap menyebarnya penyakit tuberkulosis karena stabil pada saat kondisi penyakit tuberkulosis menjadi wabah.

REFERENSI

Anton H. and Rorres C. 2014. *Elementary Linear Algebra : Applications Versions.* 11th Ed. Book. USA : John Wiley & Sons, Inc.

Chen S, Fu X, and Small M. 2018. *Global stability of epidemic models with imperfect vaccination and quarantine on scale-free networks*. Universitas Shanghai

Nagy G. 2017. *Ordinary Differential Equations*. Mathematics Department, Michigan State Universty. East Lansing MI 48824.

Narsingani F. 2017. Fixed Point Analysis of Kermack Mckendrick SIR Model. *Kalpa Publications in Computing*. Vol. 2.

Side S. and Sanusi W. 2016. *Pemodelan Matematika pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis.* Makassar : Badan Penerbit UNM.

Strogatz S. 2014. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. 2th Ed. New York: Avalon Publishing.