

Simulasi Penjalaran Gelombang Tsunami Menggunakan Metode *Optimal Time Stepping*

Khoirun Nisa^{1, a)}, Lukita Ambarwati^{1, b)}, Tri Murdiyanto^{1, c)}

¹ Program Studi Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta
Jln. Rawamangun Muka, Rawamangun, Jakarta Timur, DKI Jakarta

Email: ^{a)}nisakhairunnisa48@gmail.com, ^{b)}lukita@unj.ac.id, ^{c)}trimurdiyanto@yahoo.com

Abstract

Being in the Pacific Ring of Fire makes Indonesia an area prone to volcanic eruptions, earthquakes, and tsunamis. Tsunami is a wave that occurs after an earthquake or a volcano erupts or a meteor hit in the sea. There are so many losses the humans when a tsunami occurs, so there are many researchers who establish model about the propagation of tsunami waves. The propagation of tsunami waves can be studied with various theories, one of which is using the theory of shallow water. However, the model cannot be solved analytically. For this reason, a numerical approach is needed in order to obtain a solution that approaches the true solution. The Optimal Time Stepping Method is one method for obtaining numerical solutions of partial differential equations. This method also requires less time and is more accurate when compared to other methods. This research will simulate the propagation of tsunami waves by using the Optimal Time Stepping method.

Keywords: tsunami, partial differential equations, shallow water theory, the Optimal Time Stepping method.

Abstrak

Berada di kawasan *Ring of Fire* atau Cincin Api Pasifik menjadikan Indonesia wilayah yang rawan letusan gunung berapi, gempa dan tsunami. Tsunami adalah ombak yang terjadi setelah suatu gempa, gunung meletus atau hantaman meteor di laut. Banyak sekali kerugian yang didapat manusia ketika terjadinya tsunami sehingga banyak peneliti yang memodelkan penjalaran gelombang tsunami. Penjalaran gelombang tsunami dapat dikaji dengan berbagai teori, salah satunya menggunakan teori perairan air dangkal. Akan tetapi, model tersebut tidak bisa diselesaikan secara analitik. Untuk itu diperlukan pendekatan secara numerik sehingga didapat penyelesaian yang mendekati solusi seajutinya. Metode *Optimal Time Stepping* merupakan salah satu metode untuk mendapatkan solusi numerik dari persamaan diferensial parsial. Metode ini juga membutuhkan waktu yang lebih sedikit dan lebih akurat jika dibandingkan dengan metode lain. Penelitian ini akan mensimulasikan penjalaran gelombang tsunami dengan menggunakan metode *Optimal Time Stepping*.

Kata-kata kunci: tsunami, persamaan diferensial parsial, teori air dangkal, metode *Optimal Time Stepping*.

PENDAHULUAN

Gempa bumi adalah getaran dari kulit bumi yang bersifat sementara dan kemudian menyebar ke segala arah (Howel, 1969). Datangnya gempa tidak dapat diprediksi secara tepat, gempa juga dapat menyebabkan terjadinya bencana lain seperti tsunami, meletusnya gunung berapi, dan longsor (Nandi, 2006). Tsunami adalah sebuah ombak yang terjadi setelah sebuah gempa, gunung berapi meletus atau hantaman meteor di laut (Sugito, 2008). Banyak sekali kerugian yang didapat manusia

ketika terjadinya tsunami sehingga banyak peneliti yang merasa perlu untuk memodelkan penjalaran gelombang tsunami.

Penjalaran gelombang tsunami dapat dikaji dengan berbagai teori salah satunya menggunakan teori perairan air dangkal. Persamaan gelombang air dangkal merupakan sistem persamaan diferensial gelombang air yang paling sederhana dan mendekati perilaku gelombang laut yang sebenarnya (Pelinovsky, 2001). Penjalaran gelombang tsunami telah disimulasikan oleh Jamhuri (2014) dengan menurunkan persamaan gelombang air dangkal 2D menggunakan prinsip konservasi massa dan prinsip konservasi momentum. Selanjutnya model gelombang air dangkal tersebut akan di selesaikan secara numerik melalui pendekatan metode volume beda hingga dengan menggunakan metode Lax-Wendroff.

Metode *Optimal Time Stepping* merupakan salah satu metode untuk mendapatkan solusi numerik dari persamaan diferensial parsial. Metode ini juga membutuhkan waktu yang lebih sedikit dan lebih akurat jika dibandingkan dengan metode lain (Zahroh, 2011). Chiu dan Yu (2007) menyelesaikan sistem *reaction-diffusion-chemotaxis* dengan menggunakan metode *Optimal Time Stepping* dan terbukti bahwa metode ini lebih efisien dibandingkan dengan metode serupa lainnya. Melihat keakuratan dan keefisienan dari metode ini membuat penulis tertarik untuk merancang simulasi penjalaran gelombang tsunami dengan menggunakan metode *Optimal Time Stepping*.

LANDASAN TEORI

Pemodelan Penjalaran Gelombang Tsunami

Persamaan konservasi massa dan momentum dalam masalah tiga dimensi dinyatakan melalui teori berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) &= 0 \\ g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Jika persamaan (1) diintegrasikan dari dasar ke permukaan dengan menggunakan aturan integral Leibniz maka akan diperoleh persamaan dua dimensi yang disebut teori air dangkal dengan kondisi dinamis dan kinetik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{MN}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_x}{\rho} &= A \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{MN}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_y}{\rho} &= A \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \tag{2}$$

Di sini M dan N , berturut-turut, merupakan fluks debit pada arah sumbu x dan y yang didapat dari:

$$M = \int_{-h}^{\eta} u dz = u(h + \eta) = uD \quad (3)$$

$$N = \int_{-h}^{\eta} v dz = v(h + \eta) = vD$$

Pergesekan dasar laut secara umum dapat dirumuskan sebagai berikut, dalam aliran yang seragam.

$$\frac{\tau_x}{\rho} = \frac{1}{2g} \frac{f}{D^2} M \sqrt{M^2 + N^2} \quad (4)$$

$$\frac{\tau_y}{\rho} = \frac{1}{2g} \frac{f}{D^2} N \sqrt{M^2 + N^2}$$

dimana f merupakan koefisien gesekan. Nilai f biasanya menggunakan nilai n yang akan diberikan pada Tabel 1.

Berikut hubungan antara koefisien gesekan f dengan kekasaran Manning n :

$$n = \sqrt{\frac{fD^{1/3}}{2g}} \quad (5)$$

$$f = \frac{2gn^2}{D^{1/3}}$$

Nilai n dipilih berdasarkan kondisi permukaan dasar laut sesuai dengan Tabel 1.

TABEL 1. Nilai n Berdasarkan Kondisi Permukaan Laut

Jenis Materi	Nilai n
Semen murni, logam halus	0,010
Batu puing	0,017
Tanah halus	0,018
Saluran alami dalam kondisi baik	0,025
Saluran alami dengan batu dan tumbuhan dasar laut	0,035
Saluran alami dalam kondisi buruk	0,060

Sehingga persamaan dasar pada perambatan tsunami perairan air dangkal adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{MN}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{2gn^2}{D^{1/3}} M \sqrt{M^2 + N^2} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{MN}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{2gn^2}{D^{1/3}} N \sqrt{M^2 + N^2} = 0$$

Metode *Optimal Time Stepping*

Sistem persamaan diferensial non homogen orde satu dengan koefisien konstan secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

$$u'(t) = M(t)u(t) + b(t) \quad (7)$$

dimana $M(t)$ adalah matriks yang bergantung pada t dan $b(t)$ adalah vektor yang bergantung pada t .

Metode Runge-Kutta orde dua untuk menyelesaikan persamaan diferensial (6) dapat ditulis sebagai berikut:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2}(M_n u_n + b_n) + \frac{\Delta t}{2}(M_{n+1} u^{(1)} + b_{n+1}) \quad (8)$$

$$u^{(1)} = u_n + \Delta t(M_n u_n + b_n) \quad (9)$$

dimana $M_n = M(t_n)$ dan $b_n = b(t_n)$. Substitusikan persamaan (9) ke persamaan (8) maka didapat:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \left(\frac{M_n u_n + M_{n+1} u_n}{2} \right) + \Delta t \left(\frac{b_n + b_{n+1}}{2} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} M_{n+1} b_n$$

jika semua fungsinya diasumsikan fungsi *smooth* maka $M_{n+1} = M_n + O(\Delta t)$. Misal $J_n = \frac{M_n + M_{n+1}}{2}$ maka persamaan tersebut menjadi:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t J_n u_n + \Delta t \left(\frac{b_n + b_{n+1}}{2} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} J_n^2 u_n + \frac{\Delta t^2}{2} J_n^2 b_n \quad (10)$$

Persamaan tersebut ekuivalen dengan persamaan orde dua berikut:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \left(J_n u^{(1)} + \frac{b_n + b_{n+1}}{2} \right) \quad (11)$$

$$u^{(1)} = u_n + \frac{\Delta t}{2} (J_n u_n + b_n) \quad (12)$$

Sehingga dapat disimpulkan langkah – langkah Metode *Optimal Time Stepping* untuk menyelesaikan persamaan (6) adalah sebagai berikut:

1. Tentukan kondisi awal u_0 dan ukuran Δt_0
2. Memisalkan matriks $J_n = \frac{M_n + M_{n+1}}{2}$
3. Menggunakan rumus berikut :

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \left(J_n u^{(1)} + \frac{b_n + b_{n+1}}{2} \right) \quad (13)$$

$$u^{(1)} = u_n + \frac{\Delta t}{2} (J_n u_n + b_n) \quad (14)$$

PEMBAHASAN

Syarat Awal dan Syarat Batas

Nilai awal berbentuk gelombang bidang *plane wave* diperoleh dari fungsi *Gaussian Bell* adalah sebagai berikut:

$$\eta(x, y, 0) = A e^{\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-x_0}{\sigma_x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{y-y_0}{\sigma_y} \right)^2 \right)} \quad (15)$$

Nilai awal yang berbentuk gelombang melingkar (*circular wave*) adalah sebagai berikut:

Syarat awal untuk fluks debit adalah sebagai berikut:

$$M_0(x, y, 0) = 0 \quad (16)$$

$$N_0(x, y, 0) = 0 \quad (17)$$

Syarat batas Von Neumann merupakan syarat batas yang turunannya pada waktu t bernilai nol atau dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, b, t) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0, t) = \frac{\partial u}{\partial y}(a, b, t) = 0 \quad (19)$$

Diskritisasi Persamaan Penjalaran Gelombang Tsunami

Persamaan gelombang tsunami linear tanpa gesekan dasar laut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial M}{\partial t} + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial N}{\partial t} + gD \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Kemudian persamaan (20) didiskritisasi menggunakan metode beda hingga menjadi

$$\frac{\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n}{\Delta t} = - \frac{(M_{i+1,j}^n - M_{i,j}^n)}{\Delta x} - \frac{(N_{i,j+1}^n - N_{i,j}^n)}{\Delta y} \quad (21)$$

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x} M_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} M_{i+1,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta y} N_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} N_{i,j+1}^n + \eta_{i,j}^n$$

$$\frac{M_{i,j}^{n+1} - M_{i,j}^n}{\Delta t} = -gD_{i,j}^n \frac{(\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i,j}^n)}{\Delta x} \quad (22)$$

$$M_{i,j}^{n+1} = \frac{\Delta t g D_{i,j}^n}{\Delta x} \eta_{i,j}^n - \frac{\Delta t g D_{i,j}^n}{\Delta x} \eta_{i+1,j}^n + M_{i,j}^n$$

$$\frac{N_{i,j}^{n+1} - N_{i,j}^n}{\Delta t} = -gD_{i,j}^n \frac{(\eta_{i,j+1}^n - \eta_{i,j}^n)}{\Delta y} \quad (23)$$

$$N_{i,j}^{n+1} = \frac{\Delta t g D_{i,j}^n}{\Delta y} \eta_{i,j}^n - \frac{\Delta t g D_{i,j}^n}{\Delta y} \eta_{i,j+1}^n + N_{i,j}^n$$

Misal $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $p = gD_{i,j}^n$, dan $\Delta x = \Delta y$. Maka persamaan (21) – (23) menjadi

$$\eta_{i,j}^{n+1} = rM_{i,j}^n - rM_{i+1,j}^n + rN_{i,j}^n - rN_{i,j+1}^n + \eta_{i,j}^n \quad (24)$$

$$M_{i,j}^{n+1} = rp\eta_{i,j}^n - rp\eta_{i+1,j}^n + M_{i,j}^n \quad (25)$$

$$N_{i,j}^{n+1} = rp\eta_{i,j}^n - rp\eta_{i,j+1}^n + N_{i,j}^n \quad (26)$$

Persamaan (24) – (26) pada $i = 1, 2, 3, \dots, K-1$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, L-1$ akan membentuk suatu pola iterasi sehingga terbentuk suatu sistem persamaan diferensial biasa. Selanjutnya sistem persamaan tersebut ditulis dalam bentuk matriks seperti berikut:

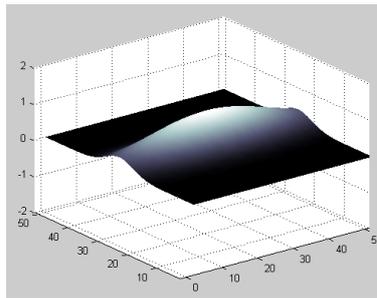
$$Ax = b$$

Simulasi dan Analisis Hasil Program

Simulasi dilakukan dengan Program Matlab dengan nilai amplitudo 0.005, pusat tsunami pada $x_0 = y_0 = 0$ dan panjang gelombang tsunami 5 km dan menggunakan dua nilai awal yang pertama nilai awal berbentuk *plane wave* dan yang kedua nilai awal berbentuk *circular wave* dan syarat batas yang digunakan merupakan syarat batas Neumann.

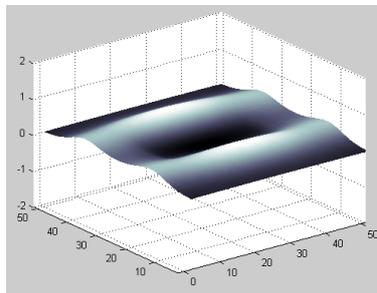
Simulasi dengan Syarat Awal *Plane Wave*

Jika dilakukan simulasi dengan $\Delta t = 0.01$, $\Delta x = \Delta y = 1$, dan syarat awal berbentuk gelombang bidang *plane wave* maka profil awal gelombang tsunami dapat dilihat pada Gambar 1. Gelombang pertama mencapai ketinggian 0.9903 km.



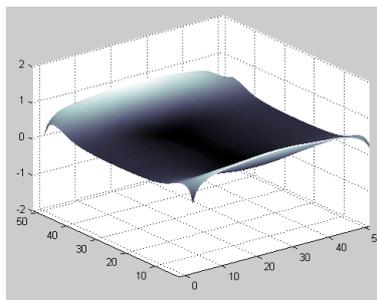
GAMBAR 1. Profil Awal Gelombang Tsunami dengan Syarat Awal *Plane Wave*

Kemudian setelah berlangsung 30 detik gelombang menurun hingga 0.063824 km di bawah permukaan laut seperti Gambar 2 dan kemudian kembali naik.



GAMBAR 2. Gelombang Tsunami setelah 30 detik dengan Syarat Awal *Plane Wave*

Pada detik ke-60 gelombang kembali tinggi dengan mencapai tinggi maksimum 0.8194 km dapat dilihat pada Gambar 3.

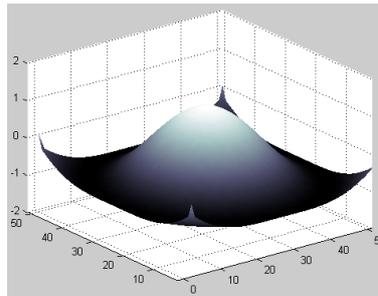


GAMBAR 3. Gelombang Tsunami setelah 60 detik dengan Syarat Awal *Plane Wave*

Jika dilihat dari hasil simulasinya, semakin lama gelombang semakin menurun dibandingkan kondisi awalnya. Perhatikan gelombang awal yang mencapai 0.9903 km dan setelah 60 detik gelombang mencapai 0.8194 km.

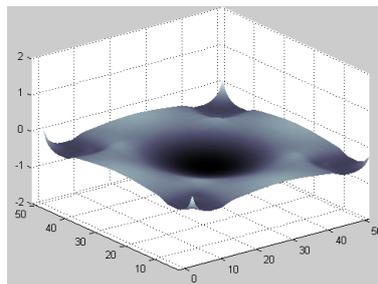
Simulasi dengan Syarat Awal *Circular Wave*

Berikutnya akan disimulasikan penjalaran gelombang tsunami dengan $\Delta t = 0.01$, $\Delta x = \Delta y = 1$, dan nilai awal yang berbentuk gelombang melingkar *circular wave* didapat profil awal gelombang tsunami seperti Gambar 4. Gelombang pertama mencapai ketinggian 0.9327 km.



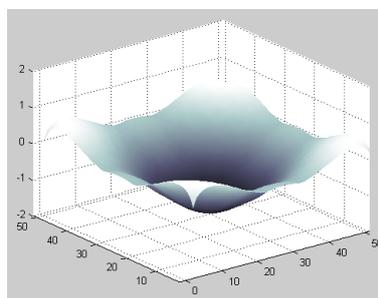
GAMBAR 4. Profil Awal Gelombang Tsunami dengan Syarat Awal *Circular Wave*

Kemudian setelah 30 detik gelombang menurun mencapai 0.7885 km di bawah permukaan laut seperti pada Gambar 5.



GAMBAR 5. Gelombang Tsunami setelah 30 detik dengan Syarat Awal *Circular Wave*

Pada detik ke-60 gelombang tsunami menurun mencapai 1.624 km di bawah permukaan laut.



GAMBAR 5. Gelombang Tsunami setelah 60 detik dengan Syarat Awal *Circular Wave*

PENUTUP

Kesimpulan

Penjalaran gelombang tsunami disimulasikan dengan menyelesaikan persamaan gelombang tsunami menggunakan metode *Optimal Time Stepping* menggunakan nilai amplitudo gelombang sebesar 0.005 km, panjang gelombang sebesar 5 km, pusat tsunami pada saat $x_0 = y_0 = 0$, $\Delta t = 0.01$, dan nilai $\Delta x = \Delta y = 1$ secara tiga dimensi. Menggunakan dua syarat awal, pertama saat gelombang awal membentuk gelombang bidang *plane wave* yang diambil dari fungsi *Gaussian Bell* dan yang kedua pada saat gelombang awal membentuk gelombang melingkar *circular wave*.

Gelombang tsunami dengan menggunakan syarat awal yang berbeda mempunyai profil gelombang tsunami yang berbeda juga. Profil awal gelombang tsunami dengan menggunakan syarat awal yang berbentuk gelombang bidang *plane wave* mencapai ketinggian maksimum 0.9903 km sedangkan gelombang tsunami dengan menggunakan syarat awal yang berbentuk gelombang melingkar *circular wave* mencapai 0.9327 km. Pada detik ke-30 gelombang tsunami dengan menggunakan syarat awal yang berbentuk gelombang bidang *plane wave* menurun hingga mencapai 0.063824 km di bawah permukaan laut dan kembali naik sedangkan untuk gelombang tsunami dengan menggunakan syarat awal yang berbentuk gelombang melingkar *circular wave* menurun mencapai 0.7885 km di bawah permukaan laut. Kemudian saat detik ke-60 gelombang tsunami dengan menggunakan syarat awal yang berbentuk gelombang bidang *plane wave* kembali menaik mencapai ketinggian maksimum 0.8194 km sedangkan untuk gelombang tsunami dengan menggunakan syarat awal yang berbentuk gelombang melingkar *circular wave* terus menurun hingga mencapai 1.624 km di bawah permukaan laut.

Saran

Penjalaran gelombang tsunami dalam penelitian ini menggunakan persamaan yang diturunkan oleh Imamura, dkk (2006) dan menggunakan syarat batas Neumann. Maka untuk penelitian selanjutnya bisa menggunakan persamaan yang diturunkan oleh peneliti lainnya atau mengganti syarat batas menggunakan syarat batas Dirichlet.

REFERENSI

- Boyce, William E. dan Richard C. DiPrima. 2010, "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems", John Wiley & Sons, Inc.
- Chiu, Chiachia dan Jui-Ling Yu, 2007, "An Optimal Adaptive Time Stepping Scheme for Solving Reaction Diffusion Chemotaxis Systems", *Mathematical Biosciences And Engineering*, vol. 4, no. 2.
- Djojodihardjo, Harijono, 2000, "Metode Numerik", Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.
- Fauzi, Yulian dkk, 2016, "Pemodelan Penjalaran Gelombang Tsunami Melalui Pendekatan Finite Difference Method", Bengkulu : Universitas Bengkulu.
- Howel, 1969, dalam Nandi, 2006, "Handout Geologi Lingkungan: Gempa Bumi", Bandung : Universitas Pendidikan Indonesia.
- Imamura, Fumihiko, Ahmet Cevdet Yalciner dan Gulizar Ozyurt, 2006, "Tsunami Modelling Manual", Jepang : Tohoku University.
- Jamhuri, Muhammad, 2014, "Simulasi Perambatan Tsunami menggunakan Persamaan Gelombang Air-Dangkal", Malang : Universitas Islam Negeri Maliki Malang.
- Nagy, Gabriel, 2017, "Ordinary Differential Equations", Michigan : Michigan State University.
- Nandi, 2006, "Handout Geologi Lingkungan: Gempa Bumi", Bandung : Universitas Pendidikan Indonesia.

- Pelinovsky, Efim, dkk, 2001, "Nonlinear mechanism of tsunami wave generation by atmospheric disturbances", *Natural Hazard and Earth Science* 1, 243-250.
- Sugito, Nanin Trianawati, 2008, "Tsunami", Bandung : Universitas Pendidikan Indonesia.
- Sutowijoyo, AP, 2005, "Tsunami, Karakteristiknya dan Pencegahannya", *Majalah INOVASI* vol. 3/XVII/Maret 2005.
- Tveito, Aslak dan Ragnar Winther, 1998, "Introduction to Partial Differential Equations: A Computational Approach", New York : Springer-Verlag New York.
- Zahroh, Fatimatuz, 2011, "Solusi Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Optimal Time Stepping", Malang : Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.