JMT (Jurnal Matematika dan Terapan) **4** (1) (2022), 19-31
https://doi.org/10.21009/jmt.4.1.3
e-ISSN: 2615-6792

Analisis Kestabilan pada Model Matematika Deradikalisasi

Wimbo Fari Susilo [1, a)], Lukita Ambarwati [1, b)], Eti Dwi Wiraningsih [1, c)]

[1]*Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta*

Email: [(a)]wimbofariyay@gmail.com, [(b)]lukita_72@yahoo.com, [(c)] etidwi@gmail.com

Abstract

Radicalization is a process by which individuals adopt political, social, and religious ideologies that lead to violence. Violent behavior in the radicalization process is the reason that radicalism is considered the cause of acts of terrorism. Therefore, to reduce this radicalization process, a deradicalization program is carried out. Deradicalization is an attempt to persuade adherents of radicalism to leave this notion. In order to determine the level of spread of radicalization, a mathematical model of deradicalization was made. The model consists of four compartments, namely, Susceptible, Extrimist, Recruiters, and Treatment. The model is analyzed by determining the equilibrium point and determining the base reproduction number ($\mathcal{R}_0$). If $\mathcal{R}_0 < 1$ then the system will be locally asymptotically stable, and if $\mathcal{R}_0 > 1$ then the system will be unstable. The simulation is carried out with the data that has been obtained, with the individual displacement parameters from the Extrimist compartment to the Treatment compartment with a value of 0.05 and the individual displacement from the Recruiters compartment to the Treatment compartment with a value of 0.165, simulation results show a graph that is stable to the point of endemic equilibrium. Meanwhile, if the value of individual displacement from the Extrimist and Recruiters compartments to the Treatment compartment is 0.5, the simulation results show that the graph gradually goes to zero.

***Keywords** : mathematic model, radicalization, de-radicalization.*

Abstrak

Radikalisasi adalah suatu proses dimana individu mengadopsi ideologi politik, sosial, dan agama yang mengarah kepada tindak kekerasan. Perilaku kekerasan dalam proses radikalisasi ini menjadi alasan bahwa paham radikalisme dianggap sebagai penyebab tindakan terorisme. Oleh karena itu, untuk mengurangi proses radikalisasi ini dilakukan program deradikalisasi. Deradikalisasi adalah suatu usaha untuk mengajak para penganut paham radikal untuk meninggalkan paham tersebut. Dalam rangka mengetahui tingkat penyebaran radikalisasi, dibuat model matematika deradikalisasi. Model tersebut terdiri dari empat kompartemen yaitu, *Susceptible*, *Extrimist*, *Recruiters*, dan *Treatment*. Model dianalisis dengan menentukan titik ekuilibrium dan menentukan bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$). Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka sistem akan stabil asimtotik lokal, dan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka sistem tidak stabil. Simulasi dilakukan dengan data yang telah diperoleh, dengan parameter perpindahan individu dari kompartemen *Extrimist* ke kompartemen *Treatmen* bernilai 0,05 dan perpindahan individu dari kompartemen *Recruiters* ke kompartemen *Treatmen* bernilai 0,165, hasil simulasi menunjukkan grafik yang stabil ke titik equilibrium endemik. Jika nilai perpindahan individu dari kompartemen *Extrimist* dan *Recruiters* ke kompartemen *Treatmen* adalah 0,5, hasil simulasi menunjukkan grafik lama kelamaan menuju nol.

Kata kunci: model matematika, radikalisasi, deradikalisasi.

Diterima: 07 Agustus 2021, Direvisi: 27 Februari 2022, Disetujui: 27 Februari 2022

PENDAHULUAN

Radikalisasi adalah proses dimana seseorang dapat menjadi semakin termotivasi untuk melakukan tindakan kekerasan kepada orang lain untuk mencapai tujuan pribadi atau kelompok. Menurut Horgan (2009) Radikalisasi adalah suatu proses sosial dan psikologis dari bertambahnya keyakinan seseorang terhadap ideologi politik dan agama yang ekstrim.

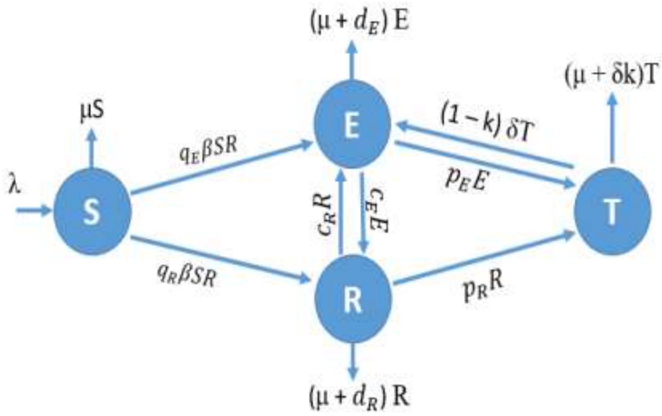
Indonesia bisa dikategorikan menjadi salah satu negara di dunia yang banyak mendapatkan aksi terorisme. Badan Nasional Penanggulangan Terorisme (BNPT) mengatakan setidaknya ada 2,7 juta orang Indonesia yang terlibat dalam serangkaian serangan teror. Berdasarkan data estimasi BNPT, ada sekitar 10-12 jaringan inti teroris sejak tahun 2018 berkembang di Indonesia. Maka tidak heran jika mantan Presiden ke-6 Republik Indonesia menempatkan terorisme bersama narkoba dan korupsi sebagai musuh utama bangsa Indonesia.

Melihat kemungkinan tindakan kekerasan yang berujung pada terorisme akibat dari proses radikalisasi, beberapa negara membuat sebuah program untuk mencegah dan menanggulangi bahaya terorisme salah satunya dengan program deradikalisasi. Program deradikalisasi adalah upaya mengubah keyakinan ekstrim (radikal) individu dan pelaku kekerasan dengan tujuan mengintegrasikan mereka kembali ke masyarakat.

PEMBAHASAN

Model Deradikalisasi

Pada model matematika deradikalisasi terdapat 4 kompartemen, yaitu *susceptible (S), extremists (E), recruiters (R),* dan *treatment (T),* berikut diagram transfer model.



GAMBAR 1. Diagram Transfer Model Deradikalisasi

Berdasarkan penjelasan tersebut maka model deradikalisasi dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{dS(t)}{dt} = \lambda - \mu S - \beta SR \tag{1}$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = q_E\beta SR + c_R R + (1-k)\delta T - (\mu + d_E + p_E + c_E)E \tag{2}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = q_R\beta SR + c_E E - (\mu + d_R + p_R + c_R)R \tag{3}$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = p_E E + p_R R - (\mu + \delta)T \tag{4}$$

Jika dinotasikan $b_E = \mu + d_E + p_E + c_E$, $b_R = \mu + d_R + p_R + c_R$, dan $b_T = \mu + \delta$, untuk menyederhanakan sistem (1) sampai (4), sistem persamaan ditulis menjadi sebagai berikut.

$$S' = \lambda - \mu S - \beta SR \tag{5}$$
$$E' = q_E\beta SR + c_R R + (1-k)\delta T - b_E E \tag{6}$$
$$R' = q_R\beta SR + c_E E - b_R R \tag{7}$$
$$T' = p_E E + p_R R - b_T T \tag{8}$$

Titik Ekuilibrium Model Deradikalisasi

Titik S, E, R, T merupakan titik-titik ekuilibrium dari sistem (5)-(8) jika memenuhi kondisi $S' = E' = R' = T' = 0$. Sehingga diperoleh x_0 sebagai berikut,

$$\begin{aligned} &R' = 0\\ &q_R\beta SR + c_E E - b_R R = 0\\ &(q_R\beta S - b_R)R + c_E E = 0\\ &c_E E = 0\\ &E = 0 \end{aligned}$$

didapatkan $E = 0$ maka dapat diperoleh

$$\begin{aligned} &E' = 0\\ &q_E\beta SR + c_R R - b_E E = 0\\ &(q_E\beta S + c_R)R - b_E E = 0\\ &(q_E\beta S + c_R)R = 0\\ &R = 0 \end{aligned}$$

didapatkan $R = 0$ maka dapat diperoleh

$$\begin{aligned} &T' = 0\\ &p_E E + p_R R - b_T T = 0\\ &p_E(0) + p_R(0) - b_T T = 0\\ &-b_T T = 0\\ &T = 0 \end{aligned}$$

maka didapatkan nilai S sebagai berikut

$$\begin{aligned} &S' = 0\\ &\lambda - \mu S - \beta SR = 0\\ &\lambda - \mu S - \beta S(0) = 0\\ &\lambda - \mu S = 0\\ &S = \frac{\lambda}{\mu} \end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh titik ekuilibrium dari model deradikalisasi yaitu, $x_0 = (S_0, E_0, R_0, T_0) = (\frac{\lambda}{\mu}, 0,0,0)$.

Pada model deradikalisasi dapat ditentukan juga titik ekuilibrium $\tilde{x} = (\tilde{S}, \tilde{E}, \tilde{R}, \tilde{T})$ dari persamaan (5) - (8) dimana $\tilde{E} \neq 0, \tilde{R} \neq 0$, dan $\tilde{T} \neq 0$. Untuk menentukan titik ekuilibrium tersebut, mula-mula penulis mensubtitusi nilai $T = \frac{p_E E}{b_T} + \frac{p_R R}{b_T}$ ke dalam persamaan (6) dan (7) sehingga terbentuk suatu sistem linier berikut:

$$\begin{bmatrix} -b_E + \frac{\alpha p_E}{b_T} & q_E\beta S + c_R + \frac{\alpha p_R}{b_T} \\ c_E & q_R\beta S - b_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

untuk mendapatkan nilai $\tilde{E}$ dan $\tilde{R}$ tidak sama dengan nol, maka determinan dari matriks diatas haruslah nol. Maka,

$$\left(-b_E + \frac{\alpha p_E}{b_T}\right)(q_R\beta\tilde{S} - b_R) - c_E\left(q_E\beta\tilde{S} + c_R + \frac{\alpha p_R}{b_T}\right) = 0$$
$$\left(-b_E q_R\beta\tilde{S} + b_E b_R + \frac{\alpha p_E q_R\beta\tilde{S}}{b_T} - \frac{\alpha p_E b_R}{b_T}\right) - \left(q_E c_E\beta\tilde{S} + c_E c_R + \frac{\alpha c_E p_R}{b_T}\right) = 0$$

$$b_E b_R - \frac{\alpha p_E b_R}{b_T} - c_E c_R - \frac{\alpha p_R c_E}{b_T} = \beta\tilde{S}\left(b_E q_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} + q_E c_E\right)$$
$$\frac{b_E b_R - \frac{\alpha p_E b_R}{b_T} - c_E c_R - \frac{\alpha p_R c_E}{b_T}}{\beta\left(b_E q_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} + q_E c_E\right)} = \tilde{S}$$

Selanjutnya mencari $\tilde{E}$ didapatkan,

$$q_R\beta\tilde{S}\tilde{R} + c_E\tilde{E} - b_R\tilde{R} = 0$$
$$\tilde{E} = \frac{(b_R - q_R\beta\tilde{S})\tilde{R}}{c_E}$$

misalkan $w = \frac{b_R - q_R\beta\tilde{S}}{c_E}$ dan subtitusi nilai $\tilde{S}$ ke dalam persamaan, menjadi

$$w = \frac{b_R}{c_E} - \frac{q_R\beta}{c_E}\left(\frac{b_E b_R - \frac{\alpha p_E b_R}{b_T} - c_E c_R - \frac{\alpha p_R c_E}{b_T}}{\beta(b_E q_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} + q_E c_E)}\right)$$
$$w = \frac{b_R}{c_E} - \frac{q_R}{c_E}\left(\frac{b_E b_R b_T - b_T c_E c_R - \frac{\alpha}{b_T}(p_E b_R + p_R c_E)}{b_E q_R b_T - \frac{\alpha}{b_T} p_E q_R + q_E c_E b_T}\right)\frac{b_T}{b_T}$$
$$w = \frac{b_R}{c_E} - \frac{q_R}{c_E}\left(\frac{b_E b_R b_T - b_T c_E c_R - \alpha(p_E b_R + p_R c_E)}{b_E q_R b_T - \alpha p_E q_R + q_E c_E b_T}\right)$$
$$w = \frac{c_E(b_R q_E b_T + q_R c_R b_T + \alpha q_R p_R)}{c_E(c_E q_E b_T + q_R b_E b_T - \alpha p_E q_R)}$$
$$w = \frac{(b_R q_E b_T - q_R(c_R b_T + \alpha p_R))}{(c_E q_E b_T + q_R(b_E b_T - \alpha p_E))}$$

maka dapat dinyatakan

$$\tilde{E} = w\tilde{R}$$

Selanjutnya jika persamaan di atas disubtitusikan ke persamaan $\tilde{T}$ yang telah dibuat didapatkan

$$\tilde{T} = \left(\frac{p_E w + p_R}{b_T}\right)\tilde{R}$$

dari $\tilde{S}$ didapatkan pesamaan $\tilde{R}$ sebagai berikut

$$\lambda - \mu\tilde{S} - \beta\tilde{S}\tilde{R} = 0$$
$$\tilde{R} = \frac{\lambda - \mu\hat{S}}{\beta\tilde{S}}$$

lalu subtitusi persamaan $\tilde{S}$ ke dalam $\tilde{R}$

$$\tilde{R} = \frac{\lambda - \mu\left[\frac{b_E b_R - \frac{\alpha p_E b_R}{b_T} - c_E c_R - \frac{\alpha p_R c_E}{b_T}}{\beta(b_E q_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} + q_E c_E)}\right]}{\left[\frac{b_E b_R - \frac{\alpha p_E b_R}{b_T} - c_E c_R - \frac{\alpha p_R c_E}{b_T}}{(b_E q_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} + q_E c_E)}\right]}$$
$$R = \frac{\lambda\beta\left(b_E q_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} + q_E c_E\right)}{\left(b_E b_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} - c_E c_R - \frac{\alpha p_R c_E}{b_T}\right)} - \frac{\mu}{\beta}$$
$$R = \frac{\mu}{\beta}\frac{\beta\lambda\left(b_E q_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} + q_E c_E\right)}{\mu(b_E b_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} - c_E c_R - \frac{\alpha p_R c_E}{b_T})} - \frac{\mu}{\beta}$$

Sehingga didapatkan titik ekulibrium $\tilde{x} = (\tilde{S}, \tilde{E}, \tilde{R}, \tilde{T})$ adalah

$$\tilde{S} = \frac{b_E b_R - \frac{\alpha p_E b_R}{b_T} - c_E c_R - \frac{\alpha p_R c_E}{b_T}}{\beta(b_E q_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} + q_E c_E)} \quad (9)$$
$$\tilde{E} = w\tilde{R} \quad (10)$$
$$\tilde{R} = \frac{\mu}{\beta}\frac{\beta\lambda\left(b_E q_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} + q_E c_E\right)}{\mu(b_E b_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} - c_E c_R - \frac{\alpha p_R c_E}{b_T})} - \frac{\mu}{\beta} \quad (11)$$
$$\tilde{T} = \left(\frac{p_E w + p_R}{b_T}\right)\tilde{R} \quad (12)$$

Berdasarkan hasil perhitungan titik-titik ekuilibrium di atas, titik ekuilibrium $x_0 = (\frac{\lambda}{\mu}, 0,0,0)$ disebut titik ekuilibrium bebas penyakit (non endemik) karena tidak terjadi penyebaran pada kelas terinfeksi ($E = R = T = 0$), sedangkan titik ekuilibrium $\tilde{x}$ dimana S,E,R,T seperti pada persamaan (9)-(12) disebut titik ekuilibrium endemik, karena kelas terinfeksi tidak sama dengan nol.

Analisis Kestabilan Model

Pada model yang telah dibentuk, kompartemen E, R, dan T adalah kompartemen yang berisi individu yang terinfeksi. Sangat penting membedakan infeksi baru dari semua perubahan yang terjadi pada kompartemen dalam perhitungan bilangan reproduksi dasar. Misalkan $\mathcal{F}_i(x)$ adalah kemunculan kasus infeksi baru pada kompartemen i yaitu perpindahan dari kompartemen S ke kompartemen E dan R, $V_i^+(x)$ merupakan perpindahan individu ke dalam kompartemen i yaitu kompartemen S, E, R, dan T, $V_i^-(x)$ merupakan perpindahan individu keluar kompartemen i yaitu kompartemen S, E, R, dan T. Model penyebaran penyakit didefinisikan dengan sistem persamaan berikut

$$x'_i = f_i(x) \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dE}{dt} \\ \frac{dR}{dt} \\ \frac{dT}{dt} \\ \frac{dS}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_E\beta SR + c_R R + (1-k)\delta T - b_E E \\ q_R\beta SR + c_E E - b_R R \\ p_E E + p_R R - b_T T \\ \lambda - \mu S - \beta SR \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x) \tag{15}$$

$$= \begin{bmatrix} q_E\beta SR \\ q_R\beta SR \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_E E - c_R R - (1-k)\delta T \\ b_R R - c_E E \\ b_T T - p_E E - p_R R \\ \mu S + \beta SR - \lambda \end{bmatrix} \tag{16}$$

dan memenuhi asumsi (A1) - (A5) di bawah ini.

- (A1) jika $x \geq 0$, maka $\mathcal{F}_i, \mathcal{V}_i^+, \mathcal{V}_i^- \geq 0$ untuk $i = 1,2,3,4$
  Bukti
  Jika $x \geq 0$, dimana x adalah suatu populasi baik itu kompartemen E, R, T dan S, dan karena setiap fungsi mewakili perpindahan individu yang terarah, maka perpindahan individu dari satu kompartemen ke kompartemen yang lain juga akan lebih dari nol.
- (A2) Jika $x_i = 0$ maka $\mathcal{V}_i^- = 0$. Pada kasus khusus, jika $x \in \mathcal{X}_s$ maka $\mathcal{V}_i^- = 0$ untuk $i = 1,2,3,4$
  Bukti
  Jika kompartemen E, R, T atau S sama dengan nol $(x_i = 0)$ maka tidak akan ada perpindahan individu yang keluar dari kompartemen tersebut, artinya perpindahan individu dari kompartemen satu ke yang lain sama dengan nol $\mathcal{V}_i^- = 0$. Dalam kasus khusus jika x adalah kondisi saat non endemik atau bebas penyakit, maka jelas kompartemen $E, R,$ atau T sama dengan nol, sehingga perpindahan individu juga sama dengan nol.
- (A3) $\mathcal{F}_i = 0$ jika $i > m$
  Bukti
  Pada model matematika deradikalisasi yang telah dibentuk, terdapat empat kompartmen yaitu E, R, T, dan S. Sedangkan kompartemen yang terdapat individu terinfeksi adalah E, R, dan T. Sehingga didapatkan $i = 4$ dan $m = 3$ maka $i > m$.
- (A4) Jika $x \in \mathcal{X}_s$ maka $\mathcal{F}_i(x) = 0$ dan $\mathcal{V}_i^+(x) = 0$ untuk $i = 1,2,3,4$
  Bukti
  Karena keadaan non endemik atau bebas penyakit bersifat invarian, maka jika suatu populasi adalah bebas penyakit, populasi itu akan tetap bebas penyakit.
- (A5) Jika $\mathcal{F}(x) = 0$ maka semua nilai eigen dari $Df(x_0)$ mempunyai bagian riil negatif
  Bukti
  Diketahui $\mathcal{V}(x)$ sebagai berikut

$$\mathcal{V}_i^+ = \begin{bmatrix} \lambda \\ c_R R + (1-k)\delta T \\ c_E E \\ p_E E + p_R R \end{bmatrix}; \mathcal{V}_i^- = \begin{bmatrix} \mu + \beta SR \\ b_E E \\ b_R R \\ b_T T \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x) &= \mathcal{V}_i^- - \mathcal{V}_i^+ \\ &= \begin{bmatrix} \mu S + \beta SR \\ b_E E \\ b_R R \\ b_T T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda \\ c_R R + (1-k)\delta T \\ c_E E \\ p_E E + p_R R \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mu S + \beta SR - \lambda \\ b_E E - c_R R - (1-k)\delta T \\ b_R R - c_E E \\ b_T T - p_E E - p_R R \end{bmatrix} \end{aligned}$$

karena $\mathcal{F}(x) = 0$ maka persamaannya menjadi

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 - \mathcal{V}(x) \\ &= -\mathcal{V}(x) \\ &= -\begin{bmatrix} \mu S + \beta SR - \lambda \\ b_E E - c_R R - (1-k)\delta T \\ b_R R - c_E E \\ b_T T - p_E E - p_R R \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda - \mu S - \beta SR \\ c_R R + (1-k)\delta T - b_E E \\ c_E E - b_R R \\ p_E E + p_R R - b_T T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kemudian berdasarkan matriks diatas akan dicari nilai dari $Df(x)$

$$Df(x) = \begin{bmatrix} -\mu - \beta R & 0 & -\beta S & 0 \\ 0 & -b_E & c_R & (1-k)\delta \\ 0 & c_E & -b_R & 0 \\ 0 & p_E & p_R & -b_T \end{bmatrix}$$

maka,

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & \frac{-\beta\lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & -b_E & c_R & (1-k)\delta \\ 0 & c_E & -b_R & 0 \\ 0 & p_E & p_R & -b_T \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari $Df(x_0)$

$$\begin{aligned} 0 &= det(\lambda I - Df(x_0)) \\ &= det \begin{bmatrix} \lambda + \mu & 0 & \frac{\beta\lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & \lambda + b_E & -c_R & -(1-k)\delta \\ 0 & -c_E & \lambda + b_R & 0 \\ 0 & -p_E & -p_R & \lambda + b_T \end{bmatrix} \\ &= (\lambda + \mu)(\lambda^3 + \lambda^2(b_E + b_R + b_T) + \lambda(b_E b_R + b_E b_T - c_E c_R \end{aligned}$$

$$-(1-k)\delta p_E) + b_E b_R b_T - b_T c_E c_R - (1-k)\delta(b_R p_E + c_E p_R))$$

maka didapatkan $\lambda = -\mu$ dan

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda^3 + \lambda^2(b_E + b_R + b_T) + \lambda(b_E b_R + b_E b_T + b_R b_T - c_E c_R \\
&\quad -(1-k)\delta p_E) + b_E b_R b_T - b_T c_E c_R - (1-k)\delta(b_R p_E + c_E p_R) \\
&= \lambda^3 + \lambda^2(b_E + b_R + b_T) + \lambda(\delta k p_E + c_E d_R + c_E\delta + 2\mu c_E + c_E p_R \\
&\quad + c_R d_E + \mu c_R + c_R p_E + d_E d_R + d_E\delta + 2\mu d_E + d_E p_R + \mu d_R \\
&\quad + d_R p_E + \mu\delta + 2\mu^2 + 2\mu p_E + \mu p_R + p_E p_R + b_R b_T) + b_R p_E \delta k \\
&\quad + c_E d_R \delta + c_E d_R \mu + c_E \delta\mu + \mu^2 c_E + \mu c_E p_R + c_E p_R \delta k + c_R d_E \delta \\
&\quad + c_R d_E \mu + \mu c_R \delta + \mu^2 c_R + c_R \mu p_E + d_E d_R \delta + d_E d_R \mu + \mu\delta d_E \\
&\quad + d_E p_R \delta + \mu^2 d_E + \mu d_E p_R + \mu\delta d_R + \mu^2 d_R + \mu d_R p_E + \mu^2\delta \\
&\quad + \mu\delta p_R + \mu^3 + \mu^2 p_E + \mu^2 p_R + \mu p_E p_R
\end{aligned}$$

dimisalkan

$$\begin{aligned}
a &= 1 \\
b &= b_E + b_R + b_T \\
&= \mu + c_E + d_E + p_E + \mu + c_R + d_R + p_R + \mu + \delta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c &= \delta k p_E + c_E d_R + c_E\delta + 2\mu c_E + c_E p_R + c_R d_E + \mu c_R + c_R p_E \\
&\quad + d_E d_R + d_E\delta + 2\mu d_E + d_E p_R + \mu d_R + d_R p_E + \mu\delta + 2\mu^2 \\
&\quad + 2\mu p_E + \mu p_R + p_E p_R + b_R b_T \\
d &= b_R p_E \delta k + c_E d_R \delta + c_E d_R \mu + c_E\delta\mu + \mu^2 c_E + \mu c_E p_R + c_E p_R \delta k \\
&\quad + c_R d_E \delta + c_R d_E \mu + \mu c_R \delta + \mu^2 c_R + c_R \mu p_E + d_E d_R \delta + d_E d_R \mu \\
&\quad + \mu\delta d_E + d_E p_R \delta + \mu^2 d_E + \mu d_E p_R + \mu\delta d_R + \mu^2 d_R + \mu d_R p_E \\
&\quad + \mu^2\delta + \mu\delta p_R + \mu^3 + \mu^2 p_E + \mu^2 p_R + \mu p_E p_R
\end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz pembuat nol dari persamaan $a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$ akan bernilai negatif jika $a, b, c, d > 0$ dan $e = bc - ad > 0$ dimana a, b, c, d adalah koefisien dari persamaan

$$\begin{aligned}
e &= (3\mu + c_E + d_E + p_E + c_R + d_R + p_R + \delta)(\delta k p_E + c_E d_R + c_E\delta \\
&\quad + 2\mu c_E + c_E p_R + c_R d_E + \mu c_R + c_R p_E + d_E d_R + d_E\delta + 2\mu d_E \\
&\quad + d_E p_R + \mu d_R + d_R p_E + \mu\delta + 2\mu^2 + 2\mu p_E + \mu p_R + p_E p_R + b_R b_T) \\
&\quad -(b_R p_E \delta k + c_E d_R \delta + c_E d_R \mu + c_E\delta\mu + \mu^2 c_E + \mu c_E p_R + c_E p_R \delta k \\
&\quad + c_R d_E \delta + c_R d_E \mu + \mu c_R \delta + \mu^2 c_R + c_R \mu p_E + d_E d_R \delta + d_E d_R \mu \\
&\quad + \mu\delta d_E + d_E p_R \delta + \mu^2 d_E + \mu d_E p_R + \mu\delta d_R + \mu^2 d_R + \mu d_R p_E \\
&\quad + \mu^2\delta + \mu\delta p_R + \mu^3 + \mu^2 p_E + \mu^2 p_R + \mu p_E p_R)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e &= c_E\delta k p_E + d_E \delta k p_E + \delta^2 k p_E + 2\delta k mu p_E + \delta k p_E^2 + c_E^2 d_R \\
&\quad + c_E^2\delta + 2c_E^2\mu + c_E^2 p_R + c_E c_R d_E + c_E c_R d_R + 2c_E c_R \delta + p_E p_R^2 \\
&\quad + 4c_E c_R \mu + c_E c_R p_E + c_E c_R p_R + 2c_E d_E d_R + 2c_E d_E \delta + 4c_E d_E \mu \\
&\quad + 2c_E d_E p_R + c_E d_R^2 + 2c_E d_R \delta + 6c_E d_R \mu + 2c_E d_R p_E + 2c_E d_R p_R \\
&\quad + c_E\delta^2 + 6c_E\delta\mu + c_E\delta p_E + 2c_E\delta p_R + 8c_E\mu^2 + 4c_E\mu p_E + 6c_E\mu p_R \\
&\quad + 2c_E p_E p_R + c_E p_R^2 + (1-k)c_E p_R \delta + c_R^2 d_E + c_R^2\delta + 2c_R^2\mu + c_R^2 p_E \\
&\quad + c_R d_E^2 + 2c_R d_E d_R + 2c_R d_E \delta + 6c_R d_E \mu + 2c_R d_E p_E + 2c_R d_E p_R \\
&\quad + 2c_R d_R \delta + 4c_R d_R \mu + 2c_R d_R p_E + c_R\delta^2 + 6c_R\delta\mu + 2c_R\delta p_E \\
&\quad + 2c_R\delta p_R + 8c_R\mu^2 + 6c_R\mu p_E + 4c_R\mu p_R + c_R p_E^2 + 2c_R p_E p_R + d_E^2 d_R \\
&\quad + d_E^2\delta + 2d_E^2\mu + d_E^2 p_R + d_E d_R^2 + 2d_E d_R \delta + 6d_E d_R \mu + 2d_E d_R p_E
\end{aligned}$$

$$+2d_Ed_Rp_R + d_E\delta^2 + 6d_E\delta\mu + d_E\delta p_E + 2d_E\delta p_R + 8d_E\mu^2 + 4d_E\mu p_E$$
$$+6d_E\mu p_R + 2d_Ep_Ep_R + d_Ep_R^2 + d_R^2\delta + 2d_R^2\mu + d_R^2p_E + d_R\delta^2$$
$$+6d_R\delta\mu + 2d_R\delta p_E + 2d_R\delta p_R + 8d_R\mu^2 + 6d_R\mu p_E + 4d_R\mu p_R + d_Rp_E^2$$
$$+2d_Rp_Ep_R + 2\delta^2\mu + \delta^2p_R + 8\delta\mu^2 + 4\delta\mu p_E + 6\delta\mu p_R + 2\delta p_E p_R$$
$$+\delta p_R^2 + 8\mu^3 + 8\mu^2p_E + 8\mu^2p_R + 2\mu p_E^2 + 6\mu p_E p_R + 2\mu p_R^2 + p_E^2p_R$$

sehingga syarat (A5) terpenuhi.

Teorema 1 *(P. Van Den Drissche, 2002)*
Jika x_0 adalah keadaan non endemik dan $f_i(x)$ memenuhi (A1)-(A5), maka turunan dari $D\mathcal{F}(x_0)$ dan $D\mathcal{V}(x_0)$ didefinisikan sebagai
$D\mathcal{F}(x_0) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $D\mathcal{V}(x_0) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$
dimana F dan V adalah matriks $m \times m$ didefinisikan sebagai
$F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(x_0)\right]$ dan $V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0)\right]$ dengan $1 \le i, j \le m$
dimana F non negatif, V adalah matriks singular, dan semua nilai eigen dari J_4 mempunyai bagian real positif

Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar disimbolkan dengan $\mathcal{R}_0$, dirumuskan $\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$ dimana FV^{-1} merupakan *Next Generation Matrix*. Jika didefinisikan, $F = \left[\frac{\partial F_i(x_0)}{\partial x_j}\right]$ dan $V = \left[\frac{\partial V_i(x_0)}{\partial x_j}\right]$ dimana, $F_i(x)$ sebagai kemunculan dari individu yang baru terinfeksi di kompartemen m dan $V_i = V_i^- - V_i^+$ dimana $V_i^+(x)$ sebagai individu yang pindah ke dalam kompartemen m, $V_i^-(x)$ sebagai individu yang pindah keluar kompartemen m, dan m merupakan kompartemen yang terdapat individu terinfeksi, yaitu E, R, dan T. Ketika menentukan $\mathcal{R}_0$ diawali dengan mencari F dan V berikut,

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_E}{\partial E} & \frac{\partial F_E}{\partial R} & \frac{\partial F_E}{\partial T} \\ \frac{\partial F_R}{\partial E} & \frac{\partial F_R}{\partial R} & \frac{\partial F_R}{\partial T} \\ \frac{\partial F_T}{\partial E} & \frac{\partial F_T}{\partial R} & \frac{\partial F_T}{\partial T} \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_E}{\partial E} & \frac{\partial V_E}{\partial R} & \frac{\partial V_E}{\partial T} \\ \frac{\partial V_R}{\partial E} & \frac{\partial V_R}{\partial R} & \frac{\partial V_R}{\partial T} \\ \frac{\partial V_T}{\partial E} & \frac{\partial V_T}{\partial R} & \frac{\partial V_T}{\partial T} \end{bmatrix}$$

Dengan subtitusi persamaan (6) sampai (8), menjadi

$$F = \begin{bmatrix} F_E \\ F_R \\ F_T \end{bmatrix} = \beta S \begin{bmatrix} q_E \\ q_R \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ sehingga } F(x_0) = \frac{\beta\lambda}{\mu}\begin{bmatrix} 0 & q_E & 0 \\ 0 & q_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$V = \begin{bmatrix} V_E \\ V_R \\ V_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_EE - c_RR - (1-k)\delta T \\ b_RR - c_EE \\ -p_EE - p_RR + b_TT \end{bmatrix}$$

sehingga $V(x_0) = \begin{bmatrix} b_E & -c_R & -(1-k)\delta \\ -c_E & b_R & 0 \\ -p_E & -p_R & b_T \end{bmatrix}$

Setelah didapat F dan V, untuk mendapatkan *next generation matrix*, akan ditentukan V^{-1} berikut,

$$V^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} b_Rb_T & c_Rb_T + (1-k)\delta p_R & (1-k)\delta b_R \\ c_Eb_T & b_Eb_T - (1-k)\delta p_E & (1-k)\delta c_E \\ c_Ep_R + b_Rp_E & b_Ep_R + c_Rp_E & b_Eb_R - c_Ec_R \end{bmatrix}$$

dengan determinan $D = -(1-k)\delta(b_R p_E + c_E p_R) + b_T(b_E b_R - c_E c_R) > 0$
Maka *next generation matrix* dari FV^{-1}, menjadi

$$FV^{-1} = \frac{\beta S}{D}\begin{bmatrix} q_E c_E b_T & q_E b_E b_T - (1-k)\delta q_E p_E & (1-k)\delta q_E c_E \\ q_R c_E b_T & q_R b_E b_T - (1-k)\delta q_R p_E & (1-k)\delta q_R c_E \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika dirumuskan $\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$, radius spektral dapat dihitung dengan mencari mutlak dari nilai eigennya, maka akan ditentukan nilai eigen FV^{-1} dengan determinan matrix, $det|\gamma I - FV^{-1}|$. Dimana,

$$|\gamma I - FV^{-1}| = 0$$

$$\begin{bmatrix} \gamma - \frac{q_E c_E b_T \beta\lambda}{\mu D} & \frac{-q_E \beta\lambda(b_E b_T + (1-k)\delta p_E)}{\mu D} & \frac{-(1-k)\delta q_E c_E \beta\lambda}{\mu D} \\ \frac{-q_R c_E b_T \beta\lambda}{\mu D} & \gamma - \frac{q_R \beta\lambda(b_E b_T + (1-k)\delta p_E)}{\mu D} & \frac{-(1-k)\delta q_R c_E \beta\lambda}{\mu D} \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga didapat persamaan berikut

$$\gamma(\gamma^2 + \gamma\beta\lambda \frac{((1-k)\delta q_R p_E - q_R b_E b_T - q_E c_E b_T)}{\mu D}) = 0$$

$$\gamma^2(\gamma + \beta\lambda \frac{((1-k)\delta q_R p_E - q_R b_E b_T - q_E c_E b_T)}{\mu D}) = 0$$

Setelah dihitung dengan determinan matriks didapat dua nilai eigen, dan hanya satu nilai eigen yang tidak sama dengan nol.

$$\gamma_1 = 0$$

$$\gamma_2 = \frac{-\beta\lambda((1-k)\delta q_R p_E - q_R b_T b_T - q_E c_E b_T)}{\mu D}$$

$$= \frac{\beta\lambda(q_R b_E b_T + q_E c_E b_T - (1-k)\delta q_R p_E)}{\mu(b_T(b_E b_R - c_E c_R) - (1-k)\delta(b_R p_E + c_E p_R))}$$

$$= \frac{\beta\lambda b_T(q_R b_E + q_E c_E - \frac{(1-k)\delta}{b_T} q_R p_E)}{\mu b_T(b_E b_R - c_E c_R - \frac{(1-k)\delta}{b_T}(b_R p_E + c_E p_R)}$$

$$= \frac{\beta\lambda(q_R b_E + q_E c_E - \frac{(1-k)\delta}{b_T} q_R p_E)}{\mu(b_E b_R - c_E c_R - \frac{(1-k)\delta}{b_T}(b_R p_E + c_E p_R)}$$

Berdasarkan definisi radius spektral, $\rho(FV^{-1})$ adalah mutlak nilai eigen terbesar dari matrix FV^{-1}. Sehingga didapatkan dari nilai di atas adalah,

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta\lambda(q_R b_E + q_E c_E - \frac{(1-k)\delta}{b_T} q_R p_E)}{\mu(b_E b_R - c_E c_R - \frac{(1-k)\delta}{b_T}(b_R p_E + c_E p_R)}$$

Berdasarkan teorema, persamaan matematika model penyebaran $f(x)$ pada (5) - (8) memenuhi kondisi (A1) - (A5). Jika $x_0 = (\frac{\lambda}{\mu}, 0,0,0)$ adalah titik ekuilibrium bebas penyakit dan $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta\lambda(q_R b_E + q_E c_E - \frac{(1-k)\delta}{b_T} q_R p_E)}{\mu(b_E b_R - c_E c_R - \frac{(1-k)\delta}{b_T}(b_R p_E + c_E p_R)}$, maka x_0 stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 < 1$, tapi tidak stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

Analisis Titik Ekuilibrium Endemik

Berdasarkan hasil dari bilangan reproduksi dasar $(\mathcal{R}_0)$, maka persamaan titik ekuilibrium endemik $(\tilde{x})$ dari model dapat ditulis sebagai

$$\tilde{S} = \frac{b_E b_R - \frac{\alpha p_E b_R}{b_T} - c_E c_R - \frac{\alpha p_R c_E}{b_T}}{\beta(b_E q_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} + q_E c_E)}$$
$$= \frac{\lambda}{\mu \mathcal{R}_0}$$

Jika nilai $\tilde{S} > 0$ maka $\mathcal{R}_0 > 1$

$$\tilde{E} = w\tilde{R}$$
$$= \frac{w\mu}{\beta} \frac{\beta\lambda\left(b_E q_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} + q_E c_E\right)}{\mu(b_E b_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} - c_E c_R - \frac{\alpha p_R c_E}{b_T})} - \frac{\mu}{\beta}$$
$$= (w\mathcal{R}_0 - 1)\frac{\mu}{\beta}$$

Jika nilai $\tilde{E} > 0$ maka $\mathcal{R}_0 > 1$

$$\tilde{R} = \frac{\mu}{\beta} \frac{\beta\lambda\left(b_E q_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} + q_E c_E\right)}{\mu(b_E b_R - \frac{\alpha p_E q_R}{b_T} - c_E c_R - \frac{\alpha p_R c_E}{b_T})} - \frac{\mu}{\beta}$$
$$= (\mathcal{R}_0 - 1)\frac{\mu}{\beta}$$

Jika nilai $\tilde{R} > 0$ maka $\mathcal{R}_0 > 1$

$$\tilde{T} = \left(\frac{p_E w + p_R}{b_T}\right)\tilde{R}$$
$$= \left(\frac{p_E w + p_R}{b_T}\right)(\mathcal{R}_0 - 1)\frac{\mu}{\beta}$$

Jika nilai $\tilde{T} > 0$ maka $\mathcal{R}_0 > 1$

Simulasi Model

Simulasi model matematika deradikalisasi berdasarkan data yang telah diperoleh dilakukan dengan menggunakan program *maple*. Simulasi ini menampilkan bentuk plot grafik dari empat kompartemen yaitu, *susceptible*, *extrimist*, *recruiters*, dan *treatment*. Data yang digunakan dalam simulasi ini menggunakan nilai-nilai parameter berdasarkan Badan Pusat Statistik (BPS) dan jurnal Manuele Santoprete dan Fei Xu (2018) karena berdasarkan rata-rata dari data kasus radikalisme diseluruh dunia. Berikut adalah nilai-nilai parameter dari model. Berdasarkan BPS, $\Lambda = 13.252,639$, $\mu = 0,006465, d_E = 0,344, d_R = 0,061, p_E = 0,05, p_R = 0,165$. Adapun dilihat berdasarkan jurnal $\beta = 0.0000005, q_E = 0.86, c_E = 0.25, c_R = 0.15, k = 0.56, \delta = 0.1$.

Jika disubtitusikan data parameter tersebut maka akan didapatkan bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) sebagai berikut :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta\lambda(q_E c_E + q_R b_E - \frac{\alpha}{b_T} q_R p_E)}{\mu(b_E b_R - c_E c_R - \frac{\alpha}{b_T}(b_R p_E + c_E p_R))}$$
$$= 1,667680173$$

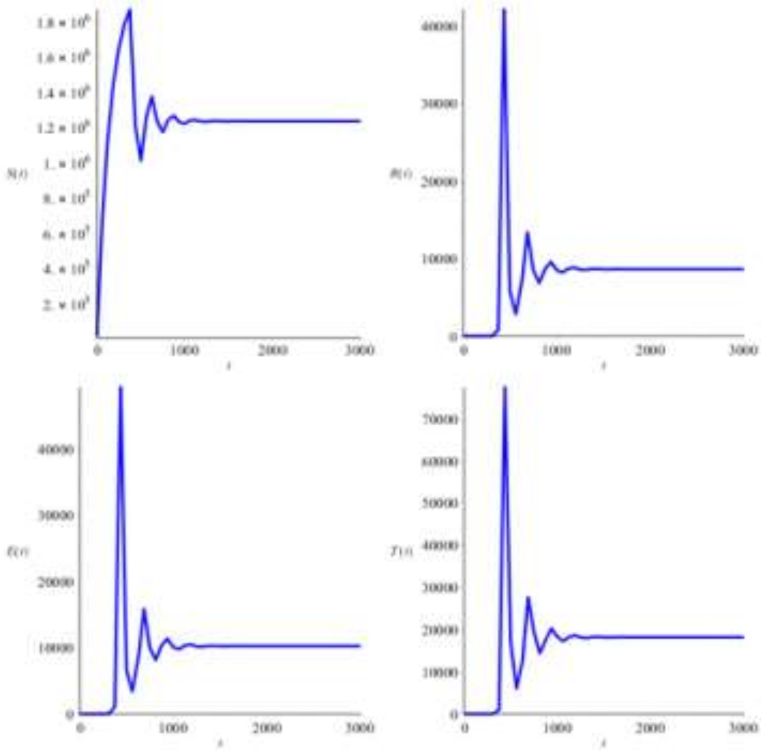
Selanjutnya nilai-nilai parameter di atas menghasilkan titik kesetimbangan endemik dari model deradikalisasi yaitu :

$$\tilde{x} = (1229195,816;\ 8633,104636;\ 8496,447855;\ 17369,8836)$$

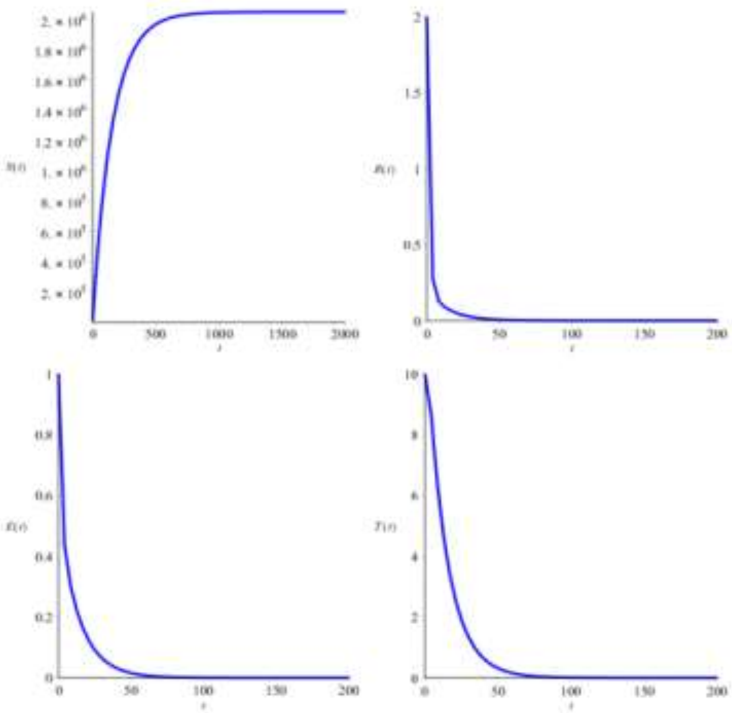
Berdasarkan hasil di atas, diketahui bahwa $\mathcal{R}_0 > 1$, artinya penyebaran akan menjadi endemik dalam populasi, dengan grafik untuk setiap kompartemen dapat dilihat pada Gambar 2.

Selanjutnya, untuk simulasi yang kedua, penulis akan menaikan nilai dari $p_E =$ dan p_R yaitu laju perpindahan *extrimist* dan *recruiters* ke kompartemen *treatment* (T). Misalkan nilai $p_E = p_R = 0,5$ ini dapat mengisyaratkan peningkatan keberhasilan program deradikalisasi, dan nilai pada kompartemen lain dibiarkan sama. Hal ini mengakibatkan nilai $\mathcal{R}_0 = 0,6314170548 < 1$.

Berdasarkan dari seluruh grafik yang telah ditampilkan pada Gambar 3, dapat dikatakan bahwa jika tingkat keberhasilan program deradikalisasi ditingkatkan, maka seluruh kompartemen yang terdapat individu terinfeksi didalamnya (E, R, T), lama-kelamaan akan berkurang dan mendekati nol. Sehingga memenuhi keadaan bebas penyakit (non-endemik). Adapun individu rentan (*Susceptible*) akan naik beriiringan dengan waktu, keadaan tersebut adalah yang paling diharapkan.



GAMBAR 2. Grafik Model Matematika Deradikalisasi



GAMBAR 3. Grafik Model dengan $p_E = p_R = 0,5$

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh penulis mengenai analisis kestabilan model matematika deradikalisasi, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Model matematika deradikalisasi sebagai berikut

$$S' = \lambda - \mu S - \beta SR \tag{17}$$
$$E' = q_E \beta SR + c_R R - b_E E \tag{18}$$
$$R' = q_R \beta SR + c_E E - b_R R \tag{19}$$
$$T' = p_E E + p_R R - b_T T \tag{20}$$

2. Pada model matematika deradikalisasi diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu, titik ekuilibrium endemik dan non-endemik. Selain itu, diperoleh angka reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) sebagai berikut:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta\lambda(q_E c_E + q_R b_E - \frac{\alpha}{b_T} q_R p_E)}{\mu(b_E b_R - c_E c_R - \frac{\alpha}{b_T}(b_R p_E + c_E p_R))}$$

   Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka titik ekuilibrium non endemik stabil asimtotik lokal, artinya tidak terjadi penyebaran dalam populasi. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal artinya terjadi penyebaran dalam populasi.

3. Simulasi dilakukan berdasarkan data yang yang diperoleh jurnal dari *Manuele Santoprete* pada tahun 2018 dan Badan Pusat Statistik(BPS). Berdasarkan hasil simulasi diperoleh nilai $\mathcal{R}_0 = 1{,}667680173 > 1$ sehingga model tersebut menjadi endemik, artinya akan terjadi penyebaran paham radikal pada populasi tersebut. Jika tingkat keberhasilan program deradikalisasi ditingkatkan menjadi $0{,}5$ maka diperoleh nilai $\mathcal{R}_0 = 0{,}6314170548 < 1$ artinya tidak terjadi penyebaran, sehingga paham radikal lama-kelamaan akan hilang.

4. Berdasarkan simulasi yang dilakukan, didapatkan grafik 2.2 yaitu keadaan ketika tindak radikal menjadi endemik pada populasi. Grafik 2.2 menunjukkan bahwa paham radikal masih akan terus menyebar di Indonesia secara stabil pada titik ekuilibriumnya pada saat $t = 1500$. Sedangkan pada grafik 2.3 menunjukkan keadaan ketika populasi bebas dari penyebaran tindak radikal. Hal ini ditunjukkan oleh grafik 2.3 dimana lama kelamaan penyebaran paham radikal akan mendekati nol, sehingga tidak lagi terjadi penyebaran pada populasi.

Saran

Pada penelitian ini telah dibahas mengenai analisis kestabilan model deradikalisasi dan disimulisaikan pada keadaan endemik. Peran bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) juga penting dalam mengontrol penyebaran paham radikal. Penulis menyarankan untuk menambahkan masalah kontrol optimal ke dalam model matematika deradikalisasi yang dapat berpengaruh pada model tersebut.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih kepada Ibu Dr. Lukita Ambarwati, S. Pd., M. Si. dan Ibu Dr. Eti Dwi Wiraningsih, S. Pd., M. Si. atas saran dan ketersediaan waktu dalam membimbing penulis, sehingga tulisan ini berhasil selesai dengan baik.

REFERENSI

Agustine, Debby. 2015.*Pemodelan Matematika*. Pendidikan Universitas Negeri Jakarta. Jakarta.

Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. 2018. *CHAOS: An Introduction to Dynamical System*. Spinger-Verlag. New York.

C. McClauskey dan M. Santoprete. 2017. *A Bare-Bones Mathematical Model of Radicalization*.Journal of Dynamics and Games, 2018, 5 (3) : 243-264.

Edelstein-Keshet L. 1998. *Mathematics Models in Biology*. New York : Random House.

H. Anton. 1987. *Aljabar Linear Elementer* (Alih Bahasa: Refina Indriasari). Jakarta. Erlangga.

Horn, A. Roger. 2013. *Matrix Analysis*. *Second Edition*. Cambridge University Press. New York.

Indriawan R.M.J dan Widiyanto B. 2016. *Pendidikan Perdamaian Sebagai Bagian dari Program Deradikalisasi: Sebuah Upaya Pencegahan Gerakan Terorisme*. Universitas Paramadina. Jakarta. Vol. 6 hal. 75-98.

Istanto, Samto H. 2015. *Problems and Challenges on Radicalization and Deradicalization of Terorism in Indonesia*. Jurnal Pertahanan. Denma Mabes TNI Angkatan Udara. 5(2): 225-244.

J. Horgans. 2009. *Walking Away From Terrorism: Accounts of Disengagement From Radical and Extremist Movements*. London, UK. 23(1) : 126-128.

L. Perko. 2001. *Differential Equations and Dynamical Systems. Third Edition*. Springer-Verlag. New York.

L. Ross. 2005. *Differential Equation*. 3rd. New York. Springer.

M. Santoprete dan Fei Xu. 2018. *Global Stability in a Mathematical Model of De-Radicalization*. Wilfrid Laurier University. Waterloo, Canada.

Merkin, David R. 1997. *Introduction to the Theory of Stability*. Springer-Verlag. New York.

O. Diekmann dan Heesterbeek. 2000. *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases*. New York: John Wiley and Son.

Olsder G. J. dan Woude J. W. 2004. *Mathematical Systems Theory*. Netherland: VVSD.

P. Driessche dan J. Watmough. 2001. *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*. Mathematical Bioscience. hal. 29-48

Ramadhan, Mustiko Rizki. dkk. 2018. *Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Tuberkolosis Dengan Strategi DOTS*. UNNES Jurnal of Mathematics. Universitas Negeri Semarang. Semarang.

S. Wiggins. 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer.

Tu, Pierre N.V. 1994. *Dynamical Systems An Introduction with Applications in Economics and Biology*. Second Edition. Sringer-Verlag. Berlin.