

Analisis Kestabilan Pemodelan Matematika Penyebaran *Word Of Mouth* Berbasis *Brand Community*

Daniel Alexander^{1,a)}, Eti Dwi Wiraningsih^{1,b)}, Lukita Ambarwati^{1,c)}

¹*Program Studi Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta*

E-mail: ^(a)daniel.pnjt@gmail.com, ^(b)eti_dwi@unj.ac.id, ^(c)lukita@unj.ac.id

ABSTRACT

Word of mouth marketing based on community brands makes companies target communities that are in accordance with product characteristics so that word of mouth marketing becomes more effective. This thesis focuses on modeling and analyzing word of mouth marketing based on brand community. Model consists of five variables, namely Susceptible, Infected, Community, Positive, and Negative. The model is analyzed by determining the equilibrium point which produces two equilibrium points, namely the equilibrium point obtained when there are no infected individuals and the equilibrium point obtained when there are infected individuals. The simulation uses data that has been obtained from one of the companies in Indonesia, with the basic reproduksi number is 950,1458877.

Keywords : Word Of Mouth, Mathematic Modelling, Equilibrium.

ABSTRAK

Pemasaran *word of mouth* berbasis *brand community* membuat perusahaan menargetkan komunitas-komunitas yang sesuai dengan karakteristik produk yang membuat pemasaran *word of mouth* menjadi lebih efektif. Penelitian ini berfokus pada pemodelan dan analisis pemasaran *word of mouth* berbasis *brand community*. Model terdiri dari lima variabel yaitu *Susceptible, Infected, Community, Positive, dan Negative*. Model dianalisis dengan menentukan titik kesetimbangan yang menghasilkan dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan yang didapatkan saat tidak ada individu terinfeksi dan titik kesetimbangan yang didapatkan saat terdapat individu terinfeksi. Simulasi menggunakan data yang telah diperoleh dari salah satu perusahaan di Indonesia, dengan nilai bilangan reproduksi dasar sebesar 950,1458877.

Kata kunci: *Word Of Mouth, Pemodelan Matematika, Titik Kesetimbangan.*

1. PENDAHULUAN

Pemasaran *word of mouth* merupakan strategi pemasaran yang dilakukan oleh pelanggan dengan memberikan komentar positif ataupun komentar negatif dari produk yang telah digunakan kepada calon pelanggan ataupun pelanggan lainnya. Komentar positif yang diberikan dapat berupa kelebihan produk atau kepuasan yang dirasakan oleh pelanggan dalam penggunaan produk, sedangkan komentar negatif yang diberikan berupa kekecewaan yang dirasakan pelanggan dalam menggunakan produk. Menurut Kotler dan Keller (2009), *word of mouth* merupakan suatu komunikasi yang dilakukan secara langsung atau melalui media elektronik antar masyarakat. Menurut Hasan (2010), *word of mouth* merupakan komentar, wawasan, atau rekomendasi pelanggan tentang pengalaman pelanggan atas layanan jasa atau barang yang mereka beli. Tentunya pelanggan tidak akan mau memberikan komentarnya apabila produk tidak memiliki kualitas yang

baik. Sehingga dalam menggunakan strategi ini, perusahaan harus lebih berfokus pada peningkatan kualitas dari produk yang dimiliki perusahaan tersebut.

Brand community merupakan kumpulan orang-orang yang menyukai minat yang sama terhadap suatu *brand* tertentu. Dalam penelitian ini, perusahaan X membentuk komunitas yang beranggotakan pelanggan-pelanggan yang sebelumnya telah membeli produk. Meskipun beranggotakan pelanggan yang telah menyukai produk bukan berarti pelanggan-pelanggan tersebut hanya memberikan komentar positif, tetapi terdapat komentar negatif yang dikarenakan perubahan kebijakan dari perusahaan, harga produk yang naik, dan hal lain yang tidak disukai pelanggan. Menurut Fajar Martha Kusuma (2010), *Brand Community* memiliki pengaruh dalam loyalitas pelanggan. Strategi *word of mouth* dapat digunakan dalam suatu *brand community*, dimana pelanggan yang menyukai produk dan telah tergabung dalam *brand community* memberikan rekomendasi produk kepada orang lain. Hal ini membuat strategi *word of mouth* berbasis *brand community* memiliki kelebihan yaitu dapat menjaga loyalitas pelanggan dan dapat menarik pelanggan baru.

Penelitian ini akan membahas model matematika untuk melakukan analisis terhadap penyebaran *word of mouth* berbasis *brand community*. Data yang digunakan untuk melakukan simulasi numerik menggunakan data penjualan dari perusahaan X. Model matematika yang dibangun merupakan pengembangan dari model matematika Hennie Husniah, Aprillya R. Lanz, Asep K. Supriatna (2019). Model matematika tersebut akan ditambahkan satu variabel yaitu variabel *brand community* sehingga model matematika tersebut akan menjadi model SICPN yang terdiri dari variabel *Susceptible*, variabel *Infected*, variabel *Community*, variabel *Positive*, variabel *Negative*. Variabel *Susceptible* menandakan terdapat populasi yang menjadi target pasar perusahaan. Variabel *Infected* menandakan terdapat populasi yang membeli produk. Variabel *Community* menandakan terdapat populasi yang loyal terhadap produk. Variabel *Positive* menandakan terdapat populasi yang berkomentar positif terhadap produk. Variabel *Negatif* menandakan terdapat populasi yang berkomentar negatif terhadap produk. Dengan adanya penelitian ini diharapkan dapat memberikan wawasan kepada perusahaan mengenai alur terjadinya pembelian sampai menjadi pelanggan loyal yang memberikan komentarnya. Kemudian model SICPN akan dianalisis kestabilannya dan dilakukan analisis sensitivitas. Selanjutnya model SICPN tersebut akan dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan bantuan *software maple*.

2. METODE PENELITIAN

2.1 Pemasaran *Word Of Mouth*

Pemasaran *word of mouth* adalah suatu pernyataan positif atau negatif yang dibuat oleh pengalaman pelanggan tentang suatu produk atau merek, yang tersedia untuk banyak orang yang menggunakan internet (Hennig- et al, 2004). Percakapan informal dan rekomendasi tentang produk dari pelanggan kepada calon pelanggan membuat pengaruh besar pada penjualan (Miroslav & Ivan, 2010). Menurut studi yang dilakukan oleh McKinsey & Co, 67% penjualan barang di Amerika Serikat didasarkan pada *word of mouth*. Ini menggambarkan bagaimana pentingnya pemasaran *word of mouth* bagi perusahaan-perusahaan di Amerika Serikat.

2.2 Persamaan Diferensial

Definisi 2.2.1 Persamaan diferensial yang melibatkan turunan variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas disebut sebagai persamaan diferensial biasa, sedangkan persamaan diferensial yang melibatkan turunan variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas disebut sebagai persamaan diferensial parsial (Ross, 1984). Persamaan diferensial linear dapat dituliskan sebagai berikut:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \quad (2..1)$$

Sehingga dari persamaan (2.1), persamaan diferensial dapat disebut linear jika memenuhi:

1. Variabel terikat dan turunannya merupakan diferensial berderajat satu.
2. Masing-masing koefisien hanya bergantung pada satu variabel bebas.

3. Tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya.

Sedangkan, persamaan diferensial yang bukan persamaan diferensial linear adalah persamaan diferensial tak linear.

2.3 Sistem Persamaan Diferensial

Secara umum sistem persamaan diferensial dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x' = f(x) \tag{2..2}$$

Persamaan (2.2) yang memiliki n persamaan diferensial dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{2..3}$$

(Aziziah & Abadi, 2017).

2.4 Titik Keseimbangan

Definisi 2.4.1 Misalkan sistem persamaan diferensial biasa adalah sebagai berikut:

$$x' = f(x) \tag{2..4}$$

Sedemikian sehingga $f(x) = \bar{0}$. Maka dikatakan x adalah titik kesetimbangan (Wiggins, 1990). **Definisi 2.4.2** Diberikan sistem persamaan diferensial $x' = f(x)$ yang memiliki solusi $y(t)$, maka titik kesetimbangan x dapat dikatakan:

1. Stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $y(t)$ yang memenuhi $|y(t_0) - x| < \delta$ berlaku, $|y(t) - x| < \varepsilon$. dimana $t_0 < t$.
2. Stabil asimtotik jika titik kesetimbangan stabil dan terdapat konstanta $b > 0$, sedemikian sehingga apabila $|y(t_0) - x| < b$ maka berlaku, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = x$.
3. Tidak stabil jika titik Kesetimbangan tidak memenuhi (1).

(Wiggins, 1990).

2.5 Matriks Jacobian

Definisi 2.5 Matriks $Jf(x)$ adalah matriks jacobian f di titik x dengan bentuk sebagai berikut:

$$Jf(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \dots & \frac{df_2}{dx_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \frac{df_n}{dx_2} & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{bmatrix} \tag{2..5}$$

(Iswanto, 2012).

2.6 Nilai Eigen

Definisi 2.6 Jika terdapat matriks A berukuran $n \times n$, maka ada sebuah vektor tak nol disebut vektor eigen dari A , jika $A\mathbf{x}$ merupakan kelipatan skalar dari \mathbf{x} . Maka terdapat

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (2..6)$$

ekuivalen dengan

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0 \quad (2..7)$$

dimana λ adalah nilai eigen dari A . Nilai eigen didapatkan dengan mencari solusi tak nol dari persamaan (2.12), dimana solusi tak nol dari persamaan (2.12) adalah

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (2..8)$$

(Anton, 1987).

2.7 Kestabilan Titik Keseimbangan

Teorema 2.7 Diberikan matriks jacobian $Jf(x)$ dari sistem persamaan tidak linear $\dot{x} = f(x)$ dengan nilai eigen λ .

1. Apabila semua bagian real nilai eigen dari $Jf(x)$ bernilai kurang dari nol, maka titik keseimbangan stabil asimtotik.
2. Apabila terdapat paling sedikit satu bagian real nilai eigen dari $Jf(x)$ bernilai nol dan lainnya bernilai kurang dari nol, maka titik keseimbangan stabil
3. Apabila terdapat paling sedikit satu bagian real nilai eigen dari $Jf(x)$ bernilai lebih dari nol, maka titik keseimbangan tidak stabil.

(Olsder dan Woude, 1994).

2.8 Kriteria Routh-Hurwitz

Definisi 2.8 Apabila diberikan persamaan dari nilai eigen adalah sebagai berikut:

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (2..9)$$

dengan $a_0, a_1, \dots, a_n > 0$ maka dapat dikatakan $f(\lambda)$ memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika

$$\det(H_j) > 0 \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, n \quad (2..10)$$

(Iswanto, 2012).

2.9 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar dilambangkan dengan (R_0) yang dapat ditentukan dengan beberapa kondisi yang akan timbul, yaitu :

1. Jika $R_0 < 1$, maka titik keseimbangan saat tidak terdapat individu terinfeksi stabil asimtotik.
2. Jika $R_0 \geq 1$, maka titik keseimbangan saat terdapat individu terinfeksi stabil asimtotik.

(Driessche dan Watmough, 2001).

2.10 Analisis Sensitivitas

Definisi 2.10 Misal terdapat suatu variabel V dan parameter p . Formula untuk mencari indeks sensitivitas dari parameter p terhadap variabel V didefinisikan sebagai berikut:

$$K_p^V = \frac{\partial V}{\partial p} \times \frac{p}{V} \tag{2..11}$$

Dalam hal ini, K adalah notasi untuk indeks sensitivitas. (Chitnis, 2008).

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Pembentukan Model Matematika

Pembentukan model SICPN terbagi atas lima variabel, yaitu populasi rentan (*Susceptible*), populasi terinfeksi (*Infected*), populasi komunitas (*Community*), populasi positif (*Positive*), dan populasi negatif (*Negative*). Berikut adalah variabel-variabel dan parameter-parameter yang akan digunakan untuk membentuk pemodelan matematika:

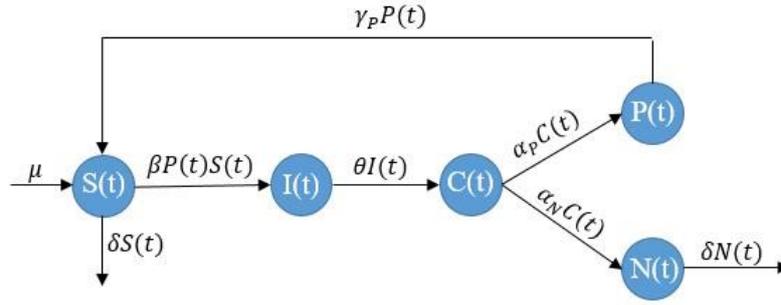
Tabel 3.1: Daftar Variabel-variabel

Variabel	Keterangan
$S(t)$	Jumlah individu potensial pada waktu t .
$I(t)$	Jumlah individu potensial yang melakukan pembelian produk pada waktu t .
$C(t)$	Jumlah individu terinfeksi yang masuk ke dalam komunitas pada waktu t .
$P(t)$	Jumlah individu komunitas yang memberikan komentar positif pada waktu t .
$N(t)$	Jumlah individu komunitas yang memberikan komentar negatif pada waktu t .

Tabel 3.2: Daftar Parameter-parameter

Parameter	Keterangan
μ	Laju <i>recruitment</i> .
	Laju individu rentan yang membeli produk.
	Laju individu terinfeksi yang masuk ke dalam komunitas.
	Laju individu komunitas yang memberikan komentar positif.
	Laju individu komunitas yang memberikan komentar negatif.
	Laju individu positif yang melakukan pembelian kembali.
	Laju pelanggan yang berhenti menggunakan produk.

Berdasarkan variabel-variabel dan parameter-parameter yang telah dibuat, maka dapat dibentuk model matematika *Susceptible* (S), *Infected* (I), *Community* (C), *Positive* (P), dan *Negative* (N) sebagai berikut:



Gambar 3.1: Model SICPN

]Berdasarkan Gambar 3.1 dapat dibentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 S(t)' &= \frac{dS(t)}{dt} = \mu + \gamma_P P(t) - \delta S(t) - \beta P(t)S(t) \\
 I(t)' &= \frac{dI(t)}{dt} = \beta P(t)S(t) - \theta I(t) \\
 C(t)' &= \frac{dC(t)}{dt} = \theta I(t) - (\alpha_P + \alpha_N)C(t) \\
 P(t)' &= \frac{dP(t)}{dt} = \alpha_P C(t) - \gamma_P P(t) \\
 N(t)' &= \frac{dN(t)}{dt} = \alpha_N C(t) - \delta N(t)
 \end{aligned} \tag{3..1}$$

3.2 Titik Kesetimbangan

Sistem (3.1) dilakukan permisalan untuk mendapatkan titik kesetimbangan sebagai berikut:

$$S(t) = S^*, I(t) = I^*, C(t) = C^*, P(t) = P^*, N(t) = N^* \tag{3..2}$$

sehingga diperoleh beberapa persamaan dengan membuat $f(x) = 0$ sebagai berikut:

$$\mu + \gamma_P P^* - \delta S^* - \beta P^* S^* = 0 \tag{3..3}$$

$$\beta P^* S^* = \theta I^* \tag{3..4}$$

$$I^* = \frac{(\alpha_P + \alpha_N)C^*}{\theta} \tag{3..5}$$

$$P^* = \frac{\alpha_P C^*}{\gamma_P} \tag{3..6}$$

$$N^* = \frac{\alpha_N C^*}{\delta} \tag{3..7}$$

kemudian diperoleh dua syarat titik kesetimbangan yaitu:

$$C^* = 0 \text{ atau } S^* = \frac{\gamma_P(\alpha_P + \alpha_N)}{\alpha_P \beta}$$

Titik kesetimbangan pertama didapatkan saat $C^* = 0$, kemudian diperoleh titik kesetimbangan pertama sebagai berikut:

$$S^* = \frac{\delta}{\mu}, I^* = 0, C^* = 0, P^* = 0, N^* = 0 \tag{3..8}$$

Titik kesetimbangan kedua didapatkan saat $S^* = \frac{\gamma_P(\alpha_P + \alpha_N)}{\alpha_P \beta}$, kemudian diperoleh titik kesetimbangan kedua sebagai berikut:

$$S^* = \frac{\gamma_P(\alpha_P + \alpha_N)}{\beta \alpha_P} \quad (3..9)$$

$$I^* = -\frac{(\alpha_P + \alpha_N)(\delta \gamma_P \alpha_P + \delta \gamma_P \alpha_N - \mu \beta \alpha_P)}{\theta \beta \alpha_P \alpha_N} \quad (3..10)$$

$$C^* = -\frac{\delta \gamma_P \alpha_P + \delta \gamma_P \alpha_N - \mu \beta \alpha_P}{\beta \alpha_P \alpha_N} \quad (3..11)$$

$$P^* = -\frac{\delta \gamma_P \alpha_P + \delta \gamma_P \alpha_N - \mu \beta \alpha_P}{\beta \alpha_N \gamma_P} \quad (3..12)$$

$$N^* = -\frac{\delta \gamma_P \alpha_P + \delta \gamma_P \alpha_N - \mu \beta \alpha_P}{\beta \alpha_P \delta} \quad (3..13)$$

3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Analisis kestabilan titik kesetimbangan pertama dapat ditentukan dengan matriks sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \delta & 0 & 0 & -\gamma_P + \beta \frac{\delta}{\mu} & 0 \\ 0 & \lambda + \theta & 0 & -\beta \frac{\delta}{\mu} & 0 \\ 0 & -\theta & \lambda + \alpha_P + \alpha_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_P & \lambda + \gamma_P & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_N & 0 & \lambda + \delta \end{vmatrix} = 0 \quad (3..14)$$

Selanjutnya dengan bantuan software maple, dapat dibentuk persamaan karakteristik dari persamaan (3.14) sebagai berikut:

$$\frac{(\lambda + \delta)^2 (a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3)}{\delta} = 0 \quad (3..15)$$

dengan

$$b_1 = \gamma_P + \alpha_P + \alpha_N$$

$$b_2 = \alpha_P + \alpha_N$$

$$a_0 = \delta$$

$$a_1 = b_1 \delta + \theta \delta$$

$$a_2 = b_1 \theta \delta + b_2 \gamma_P \delta$$

$$a_3 = b_2 \gamma_P \delta \theta - \alpha_P \mu \beta \theta$$

Penyelesaian solusi untuk persamaan (3.15) adalah sebagai berikut:

$$\det(H_1) = \begin{vmatrix} a_1 \end{vmatrix}$$

$$\det(H_1) > 0$$

$$\det(H_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\det(H_2) > 0$$

$$\det(H_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\det(H_3) > 0$$

Titik kesetimbangan pertama untuk model matematika penyebaran *word of mouth* berbasis *brand community* akan stabil asimtotik jika memenuhi syarat sebagai berikut:

$$\alpha_P \gamma_P \delta + \alpha_N \gamma_P \delta > \alpha_P \mu \beta \quad (3..16)$$

Analisis kestabilan titik kesetimbangan kedua dapat ditentukan dengan matriks sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \delta - \left(\frac{\delta \gamma_P \alpha_P + \delta \gamma_P \alpha_N - \mu \beta \alpha_P}{\alpha_N \gamma_P} \right) & 0 & 0 & -\gamma_P + \left(\frac{\gamma_P (\alpha_P + \alpha_N)}{\alpha_P} \right) & 0 \\ \frac{\delta \gamma_P \alpha_P + \delta \gamma_P \alpha_N - \mu \beta \alpha_P}{\alpha_N \gamma_P} & \lambda + \theta & 0 & -\left(\frac{\gamma_P (\alpha_P + \alpha_N)}{\alpha_P} \right) & 0 \\ 0 & -\theta & \lambda + (\alpha_P + \alpha_N) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_P & \lambda + \gamma_P & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_N & 0 & \lambda + \delta \end{vmatrix} = 0 \quad (3..17)$$

Selanjutnya dengan bantuan software maple, dapat dibentuk persamaan karakteristik dari persamaan (3.17) sebagai berikut:

$$(\lambda + \delta)(a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4) = 0 \quad (3..18)$$

dengan

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma_P + \alpha_P + \alpha_N \\ b_2 &= \alpha_P + \alpha_N \\ b_3 &= \beta \mu - \gamma_P \delta \\ a_0 &= \gamma_P \alpha_N \\ a_1 &= b_1 \gamma_P \alpha_N + b_3 \alpha_P + \gamma_P \alpha_N \theta \\ a_2 &= b_1 \gamma_P \alpha_N \theta + b_2 \gamma_P^2 \alpha_N + b_1 b_3 \alpha_P + b_3 \alpha_P \theta \\ a_3 &= b_2 b_3 \gamma_P \alpha_P + b_1 b_3 \alpha_P \theta \\ a_4 &= b_3 \gamma_P \alpha_P \alpha_N \theta - \gamma_P^2 \alpha_N^2 \delta \theta \end{aligned}$$

Penyelesaian solusi untuk persamaan (3.18) adalah sebagai berikut:

$$\det(H_1) = \begin{vmatrix} a_1 \end{vmatrix}$$

$$\det(H_1) > 0$$

$$\det(H_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\det(H_2) > 0$$

$$\det(H_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\det(H_3) > 0$$

$$\det(H_4) = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$\det(H_4) > 0$$

Titik kesetimbangan E_2 untuk model matematika penyebaran *word of mouth* berbasis *brand community* akan stabil asimtotik jika memenuhi syarat sebagai berikut:

$$\alpha_P \gamma_P \delta + \alpha_N \gamma_P \delta < \alpha_P \mu \beta \tag{3..19}$$

3.4 Bilangan Reproduksi Dasar

Didapatkan beberapa kondisi untuk bilangan reproduksi dasar sebagai berikut:

1. Titik Kesetimbangan E_1 akan stabil asimtotik jika dan hanya jika $R_0 < 1$
2. Titik Kesetimbangan E_2 akan stabil asimtotik jika dan hanya jika $R_0 > 1$ dimana,

$$R_0 = \frac{\alpha_P \mu \beta}{\alpha_P \gamma_P \delta + \alpha_N \gamma_P \delta}$$

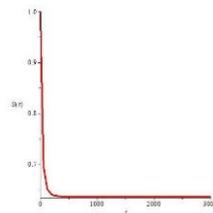
3.5 Simulasi Numerik

Diperoleh nilai-nilai dari parameter yang digunakan adalah sebagai berikut:

Tabel 3.3: Nilai-nilai Parameter

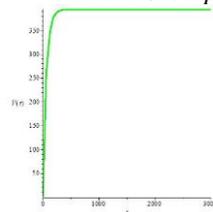
Parameter	Nilai Parameter
μ	291
β	0,5797
θ	0,2117
α_P	0,4368
α_N	0,0805
γ_P	0,0115
δ	0,0215

Berdasarkan data pada Tabel 3.3, didapatkannya $R_0 = 950,1458877 > 1$, maka diketahui bahwa data akan stabil di titik kesetimbangan kedua. Sehingga hasil simulasi numerik menggunakan Maple disajikan dengan gambar sebagai berikut:



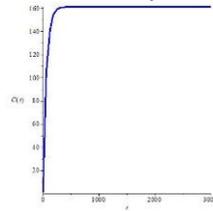
Gambar 3.2: Simulasi Numerik Variabel *Susceptible*

Berdasarkan Gambar 3.2 populasi individu rentan mengalami penurunan sampai akhirnya menuju titik kesetimbangan *Susceptible*. Hal ini menjelaskan bahwa pada bulan ke-350, jumlah populasi *Susceptible* akan berjumlah 0,6363771822 dan pada keadaan tersebut variabel *Susceptible* berada dalam keadaan stabil.



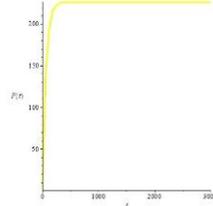
Gambar 3.3: Simulasi Numerik Variabel *Infected*

Berdasarkan Gambar 3.3 populasi individu terinfeksi mengalami kenaikan sampai akhirnya menuju titik kesetimbangan *Infected*. Hal ini menjelaskan bahwa pada bulan ke-350, jumlah populasi *Infected* akan berjumlah 394,1955978 dan pada keadaan tersebut variabel *Infected* berada dalam keadaan stabil.



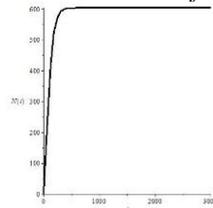
Gambar 3.4: Simulasi Numerik Variabel *Community*

Berdasarkan Gambar 3.4 populasi individu komunitas mengalami kenaikan sampai akhirnya menuju titik kesetimbangan *Community*. Hal ini menjelaskan bahwa pada bulan ke-350, jumlah populasi *Community* akan berjumlah 161,3207191 dan pada keadaan tersebut variabel *Community* berada dalam keadaan stabil.



Gambar 3.5: Simulasi Numerik Variabel *Positive*

Berdasarkan Gambar 3.5 populasi individu positif mengalami kenaikan sampai akhirnya menuju titik kesetimbangan *Positive*. Hal ini menjelaskan bahwa pada bulan ke-350, jumlah populasi *Positive* akan berjumlah 226,2115253 dan pada keadaan tersebut variabel *Positif* berada dalam keadaan stabil.



Gambar 3.6: Simulasi Numerik Variabel *Negative*

Berdasarkan Gambar 3.6 populasi individu negatif mengalami kenaikan sampai akhirnya menuju titik kesetimbangan *Negative*. Hal ini menjelaskan bahwa pada bulan ke-350, jumlah populasi *Negative* akan berjumlah 604,0147856 dan pada keadaan tersebut variabel *Negative* berada dalam keadaan stabil.

3.6 Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas untuk masing-masing parameter terhadap variabel S^* adalah sebagai berikut:

Tabel 3.4: Index Sensitivitas Parameter Terhadap S^*

Formula	Index Sensitivitas
$K_{\mu} S^*$	0
$K_{\beta} S^*$	-1
$K_{\theta} S^*$	0

Implementasi Struktur Aljabar dalam Persilangan Golongan Darah

$K_{\alpha_P}^{S^*}$	-0,16
$K_{\alpha_N}^{S^*}$	0,155
$K_{\gamma_P}^{S^*}$	1
$K_{\delta}^{S^*}$	0

Analisis sensitivitas untuk masing-masing parameter terhadap variabel I^* adalah sebagai berikut:

Tabel 3.5: Index Sensitivitas Parameter Terhadap I^*

Formula	Index Sensitivitas
$K_{\mu}^{I^*}$	1
$K_{\beta}^{I^*}$	0,00658
$K_{\theta}^{I^*}$	-1
$K_{\alpha_P}^{I^*}$	0,837
$K_{\alpha_N}^{I^*}$	-0,839
$K_{\gamma_P}^{I^*}$	-0,00000174
$K_{\delta}^{I^*}$	-0,00000174

Analisis sensitivitas untuk masing-masing parameter terhadap variabel C^* adalah sebagai berikut:

Tabel 3.6: Index Sensitivitas Parameter Terhadap C^*

Formula	Index Sensitivitas
$K_{\mu}^{C^*}$	1
$K_{\beta}^{C^*}$	0,00321
$K_{\theta}^{C^*}$	0
$K_{\alpha_P}^{C^*}$	0,00121
$K_{\alpha_N}^{C^*}$	-1
$K_{\gamma_P}^{C^*}$	-0,00000174
$K_{\delta}^{C^*}$	-0,00000174

Analisis sensitivitas untuk masing-masing parameter terhadap variabel P^* adalah sebagai berikut:

Tabel 3.7: Index Sensitivitas Parameter Terhadap P^*

Formula	Index Sensitivitas
$K_{\mu}^{P^*}$	1
$K_{\beta}^{P^*}$	-0,00422
$K_{\theta}^{P^*}$	0
$K_{\alpha_P}^{P^*}$	1
$K_{\alpha_N}^{P^*}$	-1,01
$K_{\gamma_P}^{P^*}$	-0,998
$K_{\delta}^{P^*}$	-0,00000174

Analisis sensitivitas untuk masing-masing parameter terhadap variabel N^* adalah sebagai berikut:

Tabel 3.8: Index Sensitivitas Parameter Terhadap N^*

Formula	Index Sensitivitas
$K_{\mu}^{N^*}$	1
$K_{\beta}^{N^*}$	0

$K_{\theta N^*}$	0
$K_{\alpha_P}^{N^*}$	0,00644
$K_{\alpha_N}^{N^*}$	-0,00000271
$K_{\gamma_P}^{N^*}$	-0,00000174
$K_{\delta N^*}$	-1,01

4. KESIMPULAN

Penulisan penelitian ini memiliki kesimpulan dan saran yang akan dibahas pada bagian penutup ini.

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, dapat diperoleh kesimpulan bentuk model matematika untuk penyebaran *word of mouth* berbasis *brand community* berupa sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS(t)}{dt} &= \mu + \gamma_P P(t) - \delta S(t) - \beta P(t) S(t) \\
 \frac{dI(t)}{dt} &= \beta P(t) S(t) - \theta I(t) \\
 \frac{dC(t)}{dt} &= \theta I(t) - (\alpha_P + \alpha_N) C(t) \\
 \frac{dP(t)}{dt} &= \alpha_P C(t) - \gamma_P P(t) \\
 \frac{dN(t)}{dt} &= \alpha_N C(t) - \delta N(t)
 \end{aligned} \tag{4..1}$$

Dengan melakukan analisis terhadap model matematika untuk penyebaran *word of mouth* berbasis *brand community* didapatkan dua titik kesetimbangan sebagai berikut:

$$E_1 = (S^*, I^*, C^*, P^*, N^*)$$

dimana

$$S^* = \frac{\delta}{\mu}, I^* = 0, C^* = 0, P^* = 0, N^* = 0$$

dan

$$E_2 = (S^*, I^*, C^*, P^*, N^*)$$

dimana

$$\begin{aligned}
 S^* &= \frac{\gamma_P(\alpha_P + \alpha_N)}{\beta\alpha_P} \\
 I^* &= -\frac{(\alpha_P + \alpha_N)(\delta\gamma_P\alpha_P + \delta\gamma_P\alpha_N - \mu\beta\alpha_P)}{\theta\beta\alpha_P\alpha_N} \\
 C^* &= -\frac{\delta\gamma_P\alpha_P + \delta\gamma_P\alpha_N - \mu\beta\alpha_P}{\beta\alpha_P\alpha_N} \\
 P^* &= -\frac{\delta\gamma_P\alpha_P + \delta\gamma_P\alpha_N - \mu\beta\alpha_P}{\beta\alpha_N\gamma_P} \\
 N^* &= -\frac{\delta\gamma_P\alpha_P + \delta\gamma_P\alpha_N - \mu\beta\alpha_P}{\beta\alpha_P\delta}
 \end{aligned}$$

Dengan melakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan, maka dihasilkan beberapa kondisi sebagai berikut:

1. Titik Keseimbangan E_1 akan stabil asimtotik jika dan hanya jika $R_0 < 1$
2. Titik Keseimbangan E_2 akan stabil asimtotik jika dan hanya jika $R_0 > 1$ dimana,

$$R_0 = \frac{\alpha_P \mu \beta}{\alpha_P \gamma_P \delta + \alpha_N \gamma_P \delta}$$

Simulasi numerik dilakukan dengan data yang menghasilkan nilai titik keseimbangan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_1 &= (S^*; I^*; C^*; P^*; N^*) \\ &= (604.6511628; 0; 0; 0; 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= (S^*; I^*; C^*; P^*; N^*) \\ &= (0.6363771822; 394.1955978; 161.3207191; 226.2115253; 604.0147856) \end{aligned}$$

dimana,

$$R_0 = 950,1458877$$

Berdasarkan analisis sensitivitas yang telah dilakukan diketahui bahwa:

1. Parameter α_N, γ_P memberikan pengaruh positif terhadap populasi *Susceptible* dan β, α_P memberikan pengaruh negatif terhadap populasi *Susceptible*.
2. Parameter μ, β memberikan pengaruh positif terhadap populasi *Infected* dan $\theta, \alpha_N, \gamma_P, \delta$ memberikan pengaruh negatif terhadap populasi *Infected*.
3. Parameter μ, β, α_P memberikan pengaruh positif terhadap populasi *Community* dan $\alpha_N, \gamma_P, \delta$ memberikan pengaruh negatif terhadap populasi *Community*.
4. Parameter μ, α_P memberikan pengaruh positif terhadap populasi *Positive* dan $\beta, \alpha_N, \gamma_P, \delta$ memberikan pengaruh negatif terhadap populasi *Positive*.
5. Parameter μ, α_P memberikan pengaruh positif terhadap populasi *Negative* dan $\alpha_N, \gamma_P, \delta$ memberikan pengaruh negatif terhadap populasi *Negative*.

UCAPAN TERIMAKASIH

Ucapan terimakasih ditujukan kepada semua pihak terkait atas ketersediaan waktu dalam membimbing dan memberikan saran untuk penulis, sehingga tulisan ini dapat terselesaikan dengan baik.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard. (2003). *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.
- Driessche and Watmough. (2002). *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. Mathematical Biosciences*. 180 (2002). 29–48 Fandy Tjiptono. (2001). *Strategi Pemasaran*, Edisi 1. Yogyakarta: Andi.
- Fajar Martha Kusuma. (2010). *Analisis Pengaruh Brand Community Terhadap Loyalitas Merek Pada Pengguna Honda Megapro Di Surakarta*. Skripsi Fakultas Ekonomi Universitas Diponegoro, Semarang.
- Fatima Naz. (2014). *Word Of Mouth and Its Impact on Marketing. International Journal of Scientific nad Research Publications, Volume 4, Issue 1*. 1-4.
- Hasan, Ali. (2010). *Marketing Dari Mulut ke Mulut Words Of Mouth Marketing*. Yogyakarta : Media Presindo.
- Hennie Husniah, Aprillya R. Lanz, Asep K. Supriatna. (2019). *The Equilibrium Solution of the Word-Of-Mouth Marketing Strategy. Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management Riyadh*. 120-124.

- Hennig- Thureau, Thorsten, Kevin P. Gwinner, Gianfranco Walsh, and Dwayne D. Gremler. (2004). *Electronic Word-of-Mouth via Consumer-Opinion Platforms: What Motivates Consumers to Articulate Themselves on the Internet?* *Journal of Interactive Marketing*, 18 (1): 38-52.
- Iswanto, R. (2012). *Pemodelan Matematika: Aplikasi dan Terapannya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Kotler, Philip dan Kevin Lane Keller. (2007). *Manajemen Pemasaran*, Ed. 12., Jilid 2, dialihbahasakan oleh Benjamin Molan. Jakarta : PT. Indeks.
- Miroslav Karlicek, Ivan Tomek, Miroslav Krizek. (2010). *Word Of Mouth Marketing: An Integrated Model*. *University of Economics Prague*. 1-11.
- Muniz, A.M. Jr. And T.C. O'Guinn. (2001). *Brand Community*. *Journal of Counsumer Research*. 12-32.
- Olsder, G. J & Woude, J. W. van der. (2004). *Mathematical System Theory*. *Netherland*. VVSD.
- Pengdeng Li, Xiaofan Yang, Lu-Xing Yang, Qingyu Xiong, Yingbo Wu, Yuan Yan Tang. (2017). *The Modelling and Analysis of the Word-Of-Mouth Marketing*. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 1-16.
- Patrick Campbell. (2020). "How to Calculate Churn Rate: 4 Formulas For Calculating Churn". Diakses dari <https://www.profitwell.com/customer-churn/calculate-churn-rate>. Pada 18 Mei 2021, Jam 10:15.
- Pinem, S. (1995). *Pengantar Persamaan Diferensial*. Medan: Intan Dirja Lela.
- Ross, L. (1984). *Differential Equations*. 3rd. *New York*. Spriger.
- Suryani, Tatik. (2013). *Perilaku pelanggan di Era Internet. Implikasinya pada Strategi Pemasaran*. Edisi Pertama. Cetakan Pertama. Graha Ilmu. Yogyakarta
- The Smile.IO Blog. (2021). "How to Calculate Purchase Frequency, and 3 Tips to Improve It". Diakses dari <https://blog.smile.io/how-to-calculate-purchase-frequency/>. Pada 18 Mei 2021, Jam 16:23.
- Wenjin Liu, Tao Li, Xiongding Liu, Hao Xu. (2018). *Spreading Dynamics of a Word-Of-Mouth Model on Scale-Free Networks*. *National Demonstration Center for Experimental Electric Education*. 1-3.
- Wiggins, Stephen. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer.