JMT (Jurnal Matematika dan Terapan) **5** (2) (2023), 67 – 77
https://doi.org/10.21009/jmt.5.2.2
e-ISSN: 2615-6792

Solusi Semi Analitik Persamaan Burgers Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace

Brinda Sari[1, a)], Lukita Ambarwati[1, b)], Eti Dwi Wiraningsih[1, c)]

[1]*Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta*

Email: [a)]brinda.kittywhite@gmail.com, [b)]lukita@unj,ac.id, [c)]etidwiwira@gmail.com

Abstract

Burgers equation is a partial differential equation which has important rule in fluid mechanics. Because it has nonlinear terms, the exact solution is complicated to find. Therefore many methods have been developed to find the approximate solution that can estimate the exact solution. In this research, the Laplace Adomian decomposition method is applied to calculate the approximate solution of Burgers equation. The method is a semi-analytical method to resolve nonlinear differential equation. By the numerical simulation, we obtained a result that the approximate solution by this method can estimate the exact solution with the sum of absolute and relative error less than those using approximate solution obtained by the Adomian decomposition method without the use of Laplace transform. Therefore the Laplace Adomian decomposition method is more accurate than the Adomian decomposition method in order to estimate the exact solution of the Burgers equation.

Keywords: Laplace Adomian Decomposition Method, Burgers equation, approximate solution.

Abstrak

Persamaan Burgers adalah persamaan diferensial parsial yang penting pada mekanika fluida. Karena mempunyai bentuk nonlinear, solusi eksak dari persamaan tersebut sulit untuk dicari sehingga terus dikembangkan metode untuk mencari solusi hampiran yang dapat mendekati solusi eksaknya. Dalam penelitian ini, metode dekomposisi Adomian Laplace digunakan untuk mencari solusi hampiran dari persamaan Burgers. Metode tersebut adalah metode semi analitik dalam penyelesaian persamaan diferensial non-linear. Setelah dilakukan simulasi numerik, diperoleh hasil bahwa solusi hampiran yang diperoleh dari metode ini dapat mendekati solusi eksak dengan jumlah galat mutlak dan relatif yang lebih kecil dibandingkan galat solusi hampiran dengan metode dekomposisi Adomian tanpa transformasi Laplace, sehingga dapat disimpulkan metode dekomposisi Adomian Laplace lebih akurat dibandingkan dengan metode dekomposisi Adomian dalam menghampiri solusi eksak dari persamaan Burgers.

Kata-kata kunci: metode dekomposisi Adomian Laplace, persamaan Burgers, solusi hampiran.

PENDAHULUAN

Persamaan Burgers adalah salah satu jenis persamaan diferensial parsial nonlinear yang penting dalam mekanika fluida dan muncul dalam beragam persoalan pada matematika terapan, seperti permodelan dinamika, konduksi panas, gelombang akustik, dinamika gas, arus lalu lintas, dan berbagai aplikasi lain yang berkaitan dengan gelombang nonlinear (Maleknejad dkk, 2011). Hal-hal tersebut dapat dijumpai dalam persoalan kehidupan sehari-hari seperti mekanika fluida yang sering dijumpai pada dongkrak hidrolik. Dinamika gas sering dijumpai pada alat-alat penyemprotan, seperti

Diterima: 16 Maret 2023, Direvisi: 30 Agustus 2023, Disetujui: 31 Agustus 2023

penyemprotan parfum dan lain-lain. Sedangkan arus lalu lintas berkaitan erat dengan kemacetan lalu lintas (Widiastuti, 2019).

Karena mempunyai bentuk nonlinear dalam persamaannya, solusi eksak dari persamaan Burgers sulit untuk dicari sehingga terus dikembangkan beragam metode untuk mencari solusi hampiran yang dapat mendekati solusi eksaknya. Dalam penelitian ini, akan digunakan metode dekomposisi Adomian Laplace dalam penyelesaian persamaan Burgers. Metode tersebut adalah metode semi analitik yang menggabungkan penggunaan transformasi Laplace dengan metode dekomposisi Adomian (Wartono dan Muhaijir, 2013). Dinamakan semi analitik karena metode ini memadukan metode analitik, yaitu transformasi Laplace dengan metode numerik, yaitu dekomposisi Adomian.

Metode dekomposisi Adomian Laplace merupakan salah satu metode yang akurat dan efektif untuk mencari penyelesaian dari persamaan diferensial nonlinear (Gonzalez-Gaxiola, 2017). Solusi yang dihasilkan dalam penelitian ini akan dibandingkan dengan solusi hampiran pada penelitian sebelumya yang menggunakan metode dekomposisi Adomian tanpa transformasi Laplace serta solusi eksaknya untuk menunjukkan keefektifan dari metode yang digunakan.

METODE

Persamaan Burgers

Persamaan Burgers dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+h\frac{\partial h}{\partial x}=v\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{1}$$

dimana h adalah kecepatan aliran fluida, v adalah konstanta viskositas, x adalah koordinat spasial dan t adalah waktu. h merupakan fungsi kontinu pada suatu domain R pada bidang x,t serta turunan parsial dari fungsi h, yaitu h_t, h_x dan h_{xx} ada dan bernilai tak nol (Hopf, 1950) (Cole, 1951).

Transformasi Laplace

Transformasi Laplace, yang dinotasikan dengan $\mathcal{L}$ merupakan teknik yang sangat baik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial maupun biasa, dengan cara mentransformasi persamaan diferensial awal menjadi persamaan aljabar sederhana. (Gonzalez-Gaxiola, 2017)

Berikut diberikan definisi transformasi Laplace:

Definisi 1. (Gonzalez-Gaxiola, 2017) Diberikan fungsi $h(t)$ yang terdefinisi untuk semua $t \geq 0$. Transformasi Laplace dari h adalah fungsi H yang didefinisikan sebagai berikut:

$$H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}h(t)\,dt \tag{2}$$

untuk semua nilai s yang dimana integralnya konvergen.

Berikut ini adalah definisi invers transformasi Laplace:

Definisi 2. (Gonzalez-Gaxiola, 2017) Diberikan fungsi kontinu $h(t)$. Jika $H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}$, maka $h(t)$ adalah invers transformasi Laplace dari $H(s)$, yang dinotasikan $h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$.

Metode Dekomposisi Adomian Laplace

Diberikan persamaan diferensial parsial atau biasa dalam bentuk:

$$Ph(x,t) = s(x,t) \tag{3}$$

dengan nilai awal:

$$h(x,0) = m(x) \tag{4}$$

dimana P adalah operator diferensial yang terdiri dari bagian linear dan nonlinear.

Selanjutnya, persamaan (3) ditulis dalam bentuk operator:

$$W_t h(x,t) + Dh(x,t) + Zh(x,t) = s(x,t) \tag{5}$$

dimana $W_t = \frac{\partial}{\partial t}$, D adalah operator linear yang mengandung turunan parsial terhadap x, Z adalah operator nonlinear dan s adalah fungsi sumber yang merupakan bagian non homogen dan tidak mengandung h.

Pindahkan ruas persamaan (5) untuk $W_t h(x,t)$, diperoleh:

$$W_t h(x,t) = s(x,t) - Dh(x,t) - Zh(x,t) \tag{6}$$

Metode dekomposisi Adomian Laplace bekerja dengan memadukan metode dekomposisi Adomian dengan transformasi Laplace. Sehingga, langkah selanjutnya adalah menggunakan transformasi Laplace pada persamaan (6):

$$\mathrm{L}\{W_t h(x,t)\} = \mathrm{L}\{s(x,t) - Dh(x,t) - Zh(x,t)\} \tag{7}$$

Ruas kiri pada persamaan (7) dapat ditulis menjadi:

$$s\mathrm{L}\{h(x,t)\} - h(x,0) = \mathrm{L}\{s(x,t) - Dh(x,t) - Zh(x,t)\} \tag{8}$$

Substitusikan kondisi awal, $h(x,0) = m(x)$:

$$\begin{aligned} s\mathrm{L}\{h(x,t)\} - m(x) &= \mathrm{L}\{s(x,t) - Dh(x,t) - Zh(x,t)\} \\ \mathrm{L}\{h(x,t)\} &= \frac{m(x)}{s} + \frac{1}{s}\mathrm{L}\{s(x,t) - Dh(x,t) - Zh(x,t)\} \end{aligned} \tag{9}$$

Pada kasus homogen, $s(x,t) = 0$, sehingga diperoleh:

$$\mathrm{L}\{h(x,t)\} = \frac{m(x)}{s} - \frac{1}{s}\mathrm{L}\{Dh(x,t) + Zh(x,t)\} \tag{10}$$

Selanjutnya, terapkan invers transformasi Laplace pada persamaan (10):

$$h(x,t) = m(x) - \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathrm{L}\{Dh(x,t\} + Zh(x,t)\right] \tag{11}$$

Metode dekomposisi Adomian mengasumsikan solusi $h(x,t)$ sebagai deret dalam bentuk sebagai berikut:

$$h(x,t) = \sum_{c=0}^{\infty} h_c(x,t) \tag{12}$$

bagian nonlinear $Zh(x,t)$ diuraikan menjadi:

$$Zh(x,t) = \sum_{c=0}^{\infty} A_c(h_0, h_1, \ldots, h_n) \tag{13}$$

dimana $\{A_c\}_{c=0}^{\infty}$ adalah Polinomial Adomian.

Berikutnya, substitusikan persamaan (12) dan (13) ke dalam persamaan (11) sehingga diperoleh hasil:

$$\sum_{c=0}^{\infty} h_n(x,t) = m(x) - \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathrm{L}\left\{D\sum_{c=0}^{\infty} h_n(x,t)\right\} + \sum_{c=0}^{\infty} A_0(h_0, h_1, \ldots, h_n)\right] \tag{14}$$

Dari persamaan (14), diperoleh formula rekursif dalam bentuk:

$$h_0(x,t) = m(x)$$
$$h_{c+1}(x,t) = -\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathrm{L}\left\{D\sum_{c=0}^{\infty} h_n(x,t)\right\} + \sum_{c=0}^{\infty} A_0(h_0, h_1, \ldots, h_n)\right],\ c = 0,1,2,\ldots \tag{15}$$

Melalui formula rekursif di atas, dapat diperoleh solusi dari persamaan diferensial (3) dan kondisi awalnya (4) menggunakan:

$$h(x,t) \approx \sum_{c=0}^{k} h_c(x,t),\ \text{dimana } \lim_{k\to\infty}\sum_{c=0}^{k} h_c(x,t) = h(x,t)$$

Galat

Mencari solusi secara hampiran dari suatu persamaan matematika hanya dapat menghasilkan nilai estimasi yang mendekati penyelesaian eksaknya, sehingga penyelesaian secara hampiran tersebut akan mempunyai suatu kesalahan (galat) jika dibandingkan nilai eksaknya.

Misal p_* merupakan solusi hampiran dan p menyatakan solusi eksak dari suatu persamaan. Galat mutlak didefinisikan dalam bentuk sebagai berikut:

$$e_{mutlak} = |p - p_*| \tag{16}$$

Galat relatif menyatakan perbandingan galat mutlak dengan solusi eksaknya, dan dapat dihitung dengan formula sebagai berikut:

$$e_{relatif} = \frac{|p - p_*|}{1 + p} \tag{17}$$

TAHAPAN PENELITIAN

1. Menuliskan bentuk lengkap persamaan Burgers, dengan kondisi awal dan batasnya.
2. Menerapkan transformasi Laplace pada kedua ruas dari persamaan.
3. Menerapkan metode dekomposisi Adomian.
4. Mensubstitusikan asumsi penyelesaian dan polinomial Adomian ke dalam persamaan awal. Selanjutnya dilakukan manipulasi aljabar hingga diperoleh relasi rekursif.
5. Menerapkan invers transformasi Laplace pada relasi rekursif sehingga terbentuk rumus untuk menghitung anggota dari deret solusi.
6. Menghitung anggota-anggota dari deret.
7. Melakukan simulasi numerik. Hal ini dilakukan untuk mengetahui seberapa baik metode dekomposisi Adomian Laplace dalam menghampiri solusi eksak dari persamaan Burgers.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Metode Dekomposisi Adomian Laplace pada Persamaan Burgers

Persamaan Burgers yang digunakan dalam penelitian ini bersumber dari penelitian Akpan (2015). Bentuk persamaannya adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + h\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = v\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2},\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T \tag{18}$$

Konstanta v adalah konstanta yang mengatur viskositas kinematik.
dengan kondisi awal:

$$h(x,0)=m(x) \tag{19}$$

dan kondisi batas:

$$\begin{aligned} h(0,t)&=g_1(t)\\ h(1,t)&=g_2(t) \end{aligned} \tag{20}$$

Dalam persamaan (18), bagian nonlinear dari persamaan dinotasikan dengan fungsi $Z(h)$,

$$Z(h)=h\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}=hh_x \tag{21}$$

Terapkan transformasi Laplace pada kedua ruas persamaan (18):

$$\mathrm{L}\left\{\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}\right\}+\mathrm{L}\left\{h\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right\}=\mathrm{L}\left\{v\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2}\right\} \tag{22}$$

Karena v adalah konstanta, maka ruas kanan dari persamaan (22) dapat ditulis menjadi:

$$\mathrm{L}\left\{\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}\right\}+\mathrm{L}\left\{h\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right\}=v\,\mathrm{L}\left\{\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2}\right\} \tag{23}$$

Turunan pertama fungsi h terhadap t pada ruas kiri dapat ditulis dalam bentuk:

$$s\,H(x,s)-h(x,0)+\mathrm{L}\left\{h\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right\}=v\,\mathrm{L}\left\{\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2}\right\} \tag{24}$$

Substitusikan nilai awal $h(x,0)=m(x)$, diperoleh:

$$s\,H(x,s)-m(x)+\mathrm{L}\left\{h\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right\}=v\,\mathrm{L}\left\{\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2}\right\} \tag{25}$$

Pindahkan ruas untuk memperoleh $s\,H(x,s)$:

$$s\,H(x,s)=m(x)-\mathrm{L}\left\{h\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right\}+v\,\mathrm{L}\left\{\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2}\right\} \tag{26}$$

Maka diperoleh:

$$\mathrm{L}\{h(x,t)\}=H(x,s)=\frac{1}{s}\left[m(x)-\mathrm{L}\left\{h\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right\}+v\,\mathrm{L}\left\{\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2}\right\}\right] \tag{27}$$

Langkah selanjutnya adalah menerapkan metode dekomposisi Adomian. Metode ini mengasumsikan penyelesaian dalam bentuk deret tak hingga:

$$h(x,t)=\sum_{c=0}^{\infty}h_c(x,t) \tag{28}$$

dimana anggota-anggota dari deret, yaitu $h_0,h_1,h_2\ldots$ akan dicari nilainya.

Suku nonlinear pada persamaan diuraikan menjadi:

$$h\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}=\sum_{c=0}^{\infty}A_c(h_0,h_1,\ldots,h_n) \tag{29}$$

dimana A_c adalah polinomial Adomian.

Wazwaz (2000) telah mengembangkan teknik alternatif untuk menghitung polinomial Adomian dengan cara yang lebih sederhana, yaitu:

$$\begin{aligned} A_0 &= h_{0x}h_0 \\ A_1 &= h_{0x}h_1 + h_0 h_{1x} \\ A_2 &= h_{0x}h_2 + h_{1x}h_1 + h_{2x}h_0 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{30}$$

Langkah selanjutnya adalah mensubstitusi persamaan (28) dan (29) ke dalam persamaan (27), sehingga diperoleh:

$$\mathrm{L}\left\{\sum_{c=0}^{\infty} h_c(x,t)\right\} = \frac{1}{s}\left[m(x) - \mathrm{L}\left\{\sum_{c=0}^{\infty} A_c\right\} + v\,\mathrm{L}\left\{\sum_{c=0}^{\infty} \frac{\partial^2 h_c(x,t)}{\partial x^2}\right\}\right] \tag{31}$$

Berikutnya, lakukan manipulasi aljabar sehingga diperoleh relasi rekursif:

$$\begin{aligned} \mathrm{L}\{h_0(x,t)\} &= \frac{m(x)}{s} \\ \mathrm{L}\{h_c(x,t)\} &= \frac{1}{s}\left[v\,\mathrm{L}\left\{\frac{\partial^2 h_c(x,t)}{\partial x^2}\right\} - \mathrm{L}\{A_c\}\right],\ c \geq 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Terapkan invers transformasi Laplace pada kedua persamaan (32):

$$\begin{aligned} h_0(x,t) &= \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{m(x)}{s}\right\} \\ h_{c+1}(x,t) &= \mathrm{L}^{-1}\left\{\left[v\,\mathrm{L}\left\{\frac{\partial^2 h_c(x,t)}{\partial x^2}\right\} - \mathrm{L}\{A_c\}\right]\right\},\ c \geq 0 \end{aligned} \tag{33}$$

Selanjutnya, menentukan nilai $h_0, h_1, h_2 \ldots$ sebagai berikut

(i) Nilai $h_0(x,t)$:

$$\begin{aligned} h_0(x,t) &= \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{m(x)}{s}\right\} \\ &= m(x)\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = m(x) \end{aligned}$$

(ii) Nilai $h_1(x,t)$:

Akan dicari A_0 terlebih dulu:

$$A_0 = h_0(h_0)_x = m(x)\frac{dm(x)}{dx}$$

Selanjutnya, substitusikan A_0 ke h_1, diperoleh:

$$\begin{aligned} h_1(x,t) &= \mathrm{L}^{-1}\left\{\left[v\,\mathrm{L}\left\{\frac{\partial^2 h_0(x,t)}{\partial x^2}\right\} - \mathrm{L}\{A_0\}\right]\right\} \\ &= tv\frac{d^2 m(x)}{dx^2} - tm(x)\frac{dm(x)}{dx} \end{aligned}$$

(ii) Nilai $h_2(x,t)$:

Akan dicari A_1 terlebih dulu:

$$A_1 = h_1\left(h_0\right)_x + h_0\left(h_1\right)_x$$
$$= tv\frac{d^2m(x)}{dx^2}\frac{dm(x)}{dx} - 2tm(x)\left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^2 + m(x)tv\frac{d^3m(x)}{dx^3} - t\left(m(x)\right)^2\frac{d^2m(x)}{dx^2}$$

Selanjutnya, substitusikan A_1 ke h_2, diperoleh:

$$h_2(x,t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\left[v\,\mathrm{L}\left\{\frac{\partial^2 h_1(x,t)}{\partial x^2}\right\} - \mathrm{L}\left\{A_1\right\}\right]\right\}$$
$$= \frac{t^2}{2}\left(v^2\frac{d^4m(x)}{dx^4} - 4v\left(\frac{d^2m(x)}{dx^2}\frac{dm(x)}{dx}\right) - 2vm(x)\frac{d^3m(x)}{dx^3}\right)$$
$$+\frac{t^2}{2}\left(2m(x)\left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^2 + \left(m(x)\right)^2\frac{d^2m(x)}{dx^2}\right)$$

Proses selanjutnya sama untuk mencari $h_3, h_4, \ldots$

Didapatkan solusi semi analitik persamaan Burgers menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace adalah:

$$h(x,t) = m(x) + \left[tv\frac{d^2m(x)}{dx^2} - tm(x)\frac{dm(x)}{dx}\right]$$
$$+\left[\frac{t^2}{2}\left(v^2\frac{d^4m(x)}{dx^4} - 4v\left(\frac{d^2m(x)}{dx^2}\frac{dm(x)}{dx}\right) - 2vm(x)\frac{d^3m(x)}{dx^3}\right)\right]$$
$$+\left[+\frac{t^2}{2}\left(2m(x)\left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^2 + \left(m(x)\right)^2\frac{d^2m(x)}{dx^2}\right)\right] + \ldots.$$

Simulasi Numerik

Simulasi dilakukan menggunakan kondisi awal dan batas:

$$h(x,0) = \frac{2v\pi sin(\pi x)}{a + \cos(\pi x)} \tag{34}$$
$$h(0,t) = h(1,t) = 0$$

Simulasi pertama dilakukan dengan membatasi solusi hampiran hingga suku kedua pada deret, hasilnya akan dibandingkan dengan solusi eksak serta solusi hampiran dalam penelitian sebelumnya (Akpan, 2015) yang menggunakan metode dekomposisi Adomian tanpa transformasi Laplace dalam bentuk deret tak hingga yang juga dibatasi hingga suku keduanya.

Solusi eksak dari persamaan Burgers dengan nilai awal dan nilai batas (34) diberikan dalam penelitian (Wood, 2006), yaitu:

$$h(x,t) = \frac{2v\pi e^{\pi^2 vt}\sin(\pi x)}{a + e^{\pi^2 vt}\cos(\pi x)} \tag{35}$$

Nilai parameter yang disubstitusi menggunakan nilai yang ada dalam penelitian (Akpan, 2015): $v = 0.001,\ t = 0.2$ dan $a = 2$.

Berikut ini adalah perbandingan hasil solusi yang diperoleh dengan penelitian sebelumnya dan solusi eksaknya:

x	Metode Dekomposisi Adomian Akpan (2015)	Metode Dekomposisi Adomian Laplace	Solusi Eksak
0.1	0.0006610924400	0.0006570574284	0.0003895775656
0.2	0.0013184569550	0.0013129052740	0.0008138920440
0.3	0.0019687249900	0.0019613099340	0.0013228422370
0.4	0.0025967430990	0.0025835441900	0.0020141365520
0.5	0.0031486447293	0.0031353913990	0.0031478000340
0.6	0.0035461000030	0.0035255903020	0.0058284917990
0.7	0.0036162771990	0.0035893929180	0.0340072266600
0.8	0.0034254260330	0.0030906584170	-0.0067696675470

GAMBAR 1. Perbandingan Solusi Hampiran dengan Solusi Eksak (Deret Solusi Hampiran Hingga Suku Ke-2)

Diperoleh perbandingan nilai galat mutlak dan galat relatif dari kedua metode tersebut:

x	*Error* (Metode Dekomposisi Adomian - Solusi Eksak)	*Error* (Metode Dekomposisi Adomian Laplace - Solusi Eksak)	x	*Relative Error* (Metode Dekomposisi Adomian - Solusi Eksak)	*Relative Error* (Metode Dekomposisi Adomian Laplace - Solusi Eksak)
0.1	0.0002715148744	0.0002674798628	0.1	0.0002714091395	0.0002673756992
0.2	0.0005045649110	0.0004990132300	0.2	0.0005041545836	0.0004986074174
0.3	0.0006458827530	0.0006384676970	0.3	0.0006450294808	0.0006376242207
0.4	0.0005826065470	0.0005694076380	0.4	0.0005814354566	0.0005682630786
0.5	0.0000008446953	0.0000124086350	0.5	0.0000008420447	0.0000123696977
0.6	0.0022823917960	0.0023029014970	0.6	0.0022691659807	0.0022895568338
0.7	0.0303909494610	0.0304178337420	0.7	0.0293914284905	0.0294174285805
0.8	0.0101950935800	0.0098603259640	0.8	0.0102645813835	0.0099275320556
Jumlah	0.0448738486177	0.0445678382658	Jumlah	0.0439280465598	0.0436187575835

GAMBAR 2. Perbandingan Nilai Galat Mutlak dan Galat Relatif (Deret Solusi Hampiran Hingga Suku Ke-2)

Berdasarkan perbandingan tersebut, diperoleh bahwa jumlah galat mutlak dan galat relatif dari metode dekomposisi Adomian Laplace lebih kecil dibandingkan dengan metode dekomposisi Adomian, sehingga dapat disimpulkan bahwa solusi hampiran dengan metode dekomposisi Adomian Laplace lebih akurat dibandingkan dengan metode dekomposisi Adomian dalam menghampiri solusi eksak dari persamaan Burgers.

Simulasi kedua dilakukan dengan menambahkan jumlah suku pada solusi hampiran dengan metode dekomposisi Adomian Laplace yaitu hingga suku kedelapan dengan nilai parameter yang sama: $v = 0.001, t = 0.2$ dan $a = 2$.

Berikut ini adalah perbandingan hasil solusi hampiran 8 suku dengan penelitian sebelumnya dan solusi eksaknya:

x	Metode Dekomposisi Adomian Akpan (2015)	Metode Dekomposisi Adomian Laplace	Solusi Eksak
0.1	0.0006610924400	0.0006570577372	0.0003895775656
0.2	0.0013184569550	0.0013129060460	0.0008138920440
0.3	0.0019687249900	0.0019613115480	0.0013228422370
0.4	0.0025967430990	0.0025835473870	0.0020141365520
0.5	0.0031486447293	0.0031353975150	0.0031478000340
0.6	0.0035461000030	0.0035256014090	0.0058284917990
0.7	0.0036162771990	0.0035894110860	0.0340072266600
0.8	0.0034254260330	0.0030906822920	-0.0067696675470

GAMBAR 3. Perbandingan Solusi Hampiran dengan Solusi Eksak (Deret Solusi Hampiran Hingga Suku Ke-8)

Diperoleh perbandingan nilai galat mutlak dan galat relatif dari kedua metode tersebut:

x	*Error* (Metode Dekomposisi Adomian - Solusi Eksak)	*Error* (Metode Dekomposisi Adomian Laplace - Solusi Eksak)
0.1	0.0002715148744	0.0002674801716
0.2	0.0005045649110	0.0004990140020
0.3	0.0006458827530	0.0006384693110
0.4	0.0005826065470	0.0005694108350
0.5	0.0000008446953	0.0000124025190
0.6	0.0022823917960	0.0023028903900
0.7	0.0303909494610	0.0304178155740
0.8	0.0101950935800	0.0098603498390
Jumlah	0.0448738486177	0.0445678326416

x	*Relative Error* (Metode Dekomposisi Adomian - Solusi Eksak)	*Relative Error* (Metode Dekomposisi Adomian Laplace - Solusi Eksak)
0.1	0.0002714091395	0.0002673760079
0.2	0.0005041545836	0.0004986081888
0.3	0.0006450294808	0.0006376258326
0.4	0.0005814354566	0.0005682662691
0.5	0.0000008420447	0.0000123636009
0.6	0.0022691659807	0.0022895457911
0.7	0.0293914284905	0.0294174110100
0.8	0.0102645813835	0.0099275560933
Jumlah	0.0439280465598	0.0436187527937

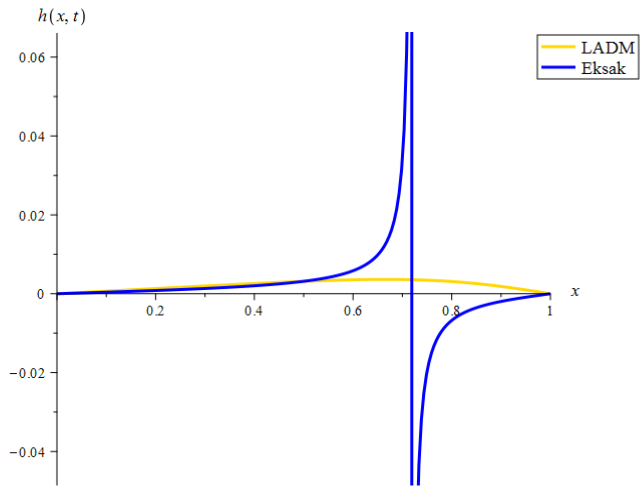
GAMBAR 4. Perbandingan Nilai Galat Mutlak dan Galat Relatif (Deret Solusi Hampiran Hingga Suku Ke-8)

Selanjutnya akan dibandingkan jumlah galat mutlak dan galat relatif yang diperoleh dari metode dekomposisi Adomian Laplace dengan jumlah anggota deret yang berbeda:

- Jika jumlah suku dalam deret solusi dibatasi pada suku ke-2, diperoleh jumlah galat mutlak sebesar 0.0044567838266, sedangkan jika ditambahkan hingga suku ke-8, diperoleh jumlah galat sebesar 0.0445678326416. Hal ini berarti deret solusi dengan 8 suku mempunyai jumlah galat mutlak yang lebih kecil jika dibandingkan dengan deret solusi dengan 2 suku.
- Jika jumlah suku dalam deret solusi dibatasi dibatasi pada suku ke-2, diperoleh jumlah galat relatif sebesar 0.0436187575835, sedangkan jika ditambahkan hingga suku ke-8, diperoleh jumlah galat relatif sebesar 0.0436187527937. Hal ini berarti deret solusi dengan 8 suku juga mempunyai jumlah galat relatif lebih kecil jika dibandingkan dengan deret solusi dengan 2 suku.

Berdasarkan perbandingan di atas, dapat disimpulkan bahwa dengan menambahkan jumlah anggota deret dalam solusi hampiran, diperoleh hasil yang lebih akurat dalam menghampiri solusi eksaknya.

Berikut adalah grafik solusi hampiran dengan 8 suku dan solusi eksaknya:



GAMBAR 5. Grafik Solusi Hampiran dan Solusi Eksak (Deret Solusi Hampiran Hingga Suku Ke-8)

Berdasarkan gambar tersebut, dapat dilihat bahwa kurva solusi eksak dan solusi hampiran dengan metode dekomposisi Adomian Laplace bersinggungan, sehingga dapat diartikan bahwa solusi semi analitik dengan metode dekomposisi Adomian Laplace dapat mendekati solusi eksak dari persamaan Burgers.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Solusi semi analitik persamaan Burgers dengan metode dekomposisi Adomian Laplace dapat diperoleh dengan langkah-langkah sebagai berikut: menerapkan transformasi Laplace pada kedua ruas persamaan, menerapkan metode dekomposisi Adomian dengan mengasumsikan solusi dalam bentuk deret tak hingga serta menguraikan bentuk nonlinear menggunakan polinomial Adomian dan menerapkan invers transformasi pada relasi rekursif yang terbentuk sehingga diperoleh solusi hampirannya.

Metode dekomposisi Adomian Laplace telah digunakan dalam penyelesaian persamaan Burgers. Setelah dilakukan dua simulasi, diperoleh bahwa solusi semi analitik yang diperoleh menggunakan metode ini dapat menghampiri solusi eksaknya dengan jumlah galat mutlak dan galat relatif yang lebih kecil dibandingkan solusi hampiran menggunakan metode dekomposisi Adomian tanpa transformasi Laplace.

Penggunaan metode dekomposisi Adomian Laplace lebih akurat dibandingkan metode dekomposisi Adomian dalam menghampiri solusi eksak dari persamaan Burgers, serta jumlah galat mutlak dan galat relatif dari solusi hampirannya akan lebih kecil untuk jumlah anggota deret solusi yang lebih banyak.

Saran

Dalam penelitian ini, solusi hampiran dari persamaan Burgers dengan kondisi awal dan batas yang telah ditentukan hanya bisa menghampiri solusi eksak pada titik-titik tertentu. Dari plot grafik, dapat dilihat bahwa solusi hampiran tidak bisa menghampiri bagian asimtotik pada kurva solusi eksaknya. Sehingga untuk penelitian selanjutnya, dapat dicari penjelasan ilmiah mengapa hal tersebut terjadi serta modifikasi apa yang bisa dilakukan agar solusi hampiran dengan kondisi awal dan batas yang sama bisa menghampiri solusi eksaknya lebih baik lagi.

Saran lain adalah mencari solusi persamaan Burgers menggunakan metode semi analitik yang lain sehingga hasil dalam penelitian ini dapat dijadikan bahan perbandingan dengan metode lain tersebut dan dapat diketahui manakah yang dapat menghampiri solusi eksaknya lebih baik.

REFERENSI

Akpan, Iyakino P. 2015. *Adomian Decomposition Approach to the Solution of the Burger's Equation*. American Journal of Computational Mathematics (2015) Vol.5 : 329-335.

Cole, Julian D. 1951. *On A Quasi-Linear Parabolic Equation Occurring in Aerodynamics.* Quarterly Of Applied Mathematics (1951) Vol.9, No.3 : 225-236.

Gonzalez-Gaxiola, O. 2017. *The* Laplace-*Adomian Decomposition Method Applied to the Kundu-Eckhaus Equation*. Mexico. Universidad Autonoma Metropolitana-Cuajimalpa. https://arxiv.org. Diakses tanggal 10 Desember 2021.

Hopf, Eberhard. 1950. *The Partial Differential Equation*. Jurnal. Communications on Pure and Applied Mathematics (1950) Vol.3 : 201–216.

Khuri, Suheil A. 2001. A Laplace Decomposition Algorithm Applied to a Class of Nonlinear Differential Equations. Journal of Applied Mathematics (2001) Vol.1, No.4 : 141-155.

Maleknejad, dkk. 2011. *Operational Matrices for Solving Burgers' Equation by Using Block-Pulse Functions with Error Analysis*. Australian Journal of Basic and Applied Sciences (2011) Vol.5, No.12 : 602-609.

Wartono dan Muhaijir. 2013. *Penyelesaian Persamaan Ricatti dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace.* Jurnal Sains, Teknologi dan Industri (2013) Vol.10, No.2.

Wazwaz, Abdul-Majid. 2000. *A New Algorithm for Calculating Adomian Polynomials for Nonlinear Operators*. Applied Mathematics and Computation (2000) Vol.111 : 53-69.

Widiastuti, Nur Fithri. 2019. *Penyelesaian Persamaan Burgers Berdasarkan Metode Lax-Friedrich dan Metode Lax-Wendroff*. Skripsi tidak dipublikasikan. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Wood, W. L. 2006. *An Exact* Solution *for Burger's Equation*. Communications in Numerical Methods in Engineering (2006) Vol.22 : 797-798.

Yulida, Yuni, dkk. 2016. *Metode Dekomposisi Laplace untuk Menentukan Solusi Persamaan Diferensial Parsial Nonlinier*. Jurnal Matematika Murni dan Terapan "Epsilon" (2016) Vol.10, No.1 : 38-45.