JMT (Jurnal Matematika dan Terapan) **6** (2) (2024), 48-58
https://doi.org/10.21009/jmt.6.2.2
e-ISSN: 2615-6792

Perbandingan Nilai Galat Pada Model Penyakit Tuberkulosis Menggunakan Metode Euler dan Heun di DKI Jakarta

Dwi Yulia Citra[1,a)], Evelin Bunga Glorya[1,b)], Khairunnisa Helmina[1,c)], Lukita Ambarwati[1,d)], Eti Dwi Wiraningsih[1,e)]

[1]*Program Studi Matematika, Universitas Negeri Jakarta, Kota Jakarta Timur, Indonesia*

Email: [a)]citradwiyulia@gmail.com, [b)]evelinbungaglorya_1305620024@mhs.unj.ac.id, [c)]khairunnisahelmina30@gmail.com, [d)]lukita@unj.ac.id, [e)]etidwiwira@gmail.com

Abstract

This study aims to compare the error value of the tuberculosis disease model using the Euler method and the Heun method in DKI Jakarta. Tuberculosis (TB) remains a global health concern due to high prevalence rates in various regions, including DKI Jakarta. The Euler method and Heun method are two numerical techniques commonly used in modeling the spread of disease. Both methods were used to estimate the numerical solution of a mathematical model describing the spread of tuberculosis in DKI Jakarta. This study involves the use of recent epidemiological data to simulate and compare the prediction results between the Euler and Heun methods. The results showed a comparison of error values between the Euler and Heun methods in modeling the spread of tuberculosis disease in DKI Jakarta. The analysis of the difference in error values provides important insights in the selection of the most appropriate numerical method for modeling the spread of a complex disease such as tuberculosis.

Keywords: *Tuberculosis Disease, Euler Method, Heun Method, Mathematical Model, Error Rate, DKI Jakarta.*

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan nilai galat pada model penyakit tuberkulosis menggunakan metode Euler dan metode Heun di DKI Jakarta. Tuberkulosis (TB) tetap menjadi perhatian kesehatan global karena tingginya tingkat prevalensi di berbagai wilayah, termasuk DKI Jakarta. Metode Euler dan metode Heun merupakan dua teknik numerik yang umum digunakan dalam memodelkan penyebaran penyakit. Kedua metode ini digunakan untuk memperkirakan solusi numerik dari model matematika yang menggambarkan penyebaran penyakit tuberkulosis di DKI Jakarta. Penelitian ini melibatkan penggunaan data epidemiologi terkini untuk mensimulasikan dan membandingkan hasil prediksi antara metode Euler dan Heun. Hasil penelitian menunjukkan perbandingan nilai galat antara metode Euler dan Heun dalam memodelkan penyebaran penyakit tuberkulosis di DKI Jakarta. Analisis perbedaan nilai galat ini memberikan wawasan yang penting dalam pemilihan metode numerik yang paling tepat untuk memodelkan penyebaran penyakit yang kompleks seperti tuberkulosis.

Kata-kata kunci: Penyakit Tuberkulosis, Metode Euler, Metode Heun, Model Matematika, Nilai Galat, DKI Jakarta.

Diterima: 27 Desember 2023, Direvisi: 30 Desember 2024, Disetujui: 30 Desember 2024

PENDAHULUAN

Tuberkulosis (TB) tetap menjadi permasalahan kesehatan global yang signifikan, termasuk di wilayah DKI Jakarta. Upaya untuk memahami dan memodelkan perkembangan penyakit ini menjadi krusial dalam upaya pencegahan, diagnosa, dan pengobatan yang efektif. Dalam konteks ini, pendekatan matematis seperti metode numerik Euler dan Heun telah menjadi fokus perhatian dalam memodelkan penyebaran penyakit ini.

Metode numerik telah menjadi alat yang penting dalam menganalisis model epidemiologi yang memprediksi dinamika penyebaran penyakit menular. Model matematis dapat membantu dalam memahami karakteristik perubahan jumlah kasus dan kecenderungan penyakit di wilayah tertentu.

Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan nilai galat antara metode numerik Euler dan Heun dalam konteks model penyakit Tuberkulosis di DKI Jakarta. Perbandingan ini penting untuk mengevaluasi keakuratan dan keandalan dari kedua metode dalam menggambarkan evolusi penyebaran penyakit secara matematis.

Melalui analisis perbandingan ini, diharapkan dapat teridentifikasi metode numerik yang lebih tepat dan akurat dalam menggambarkan dinamika penyebaran Tuberkulosis di wilayah ini. Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi penting dalam perancangan kebijakan kesehatan yang lebih efektif dan strategi intervensi yang tepat guna untuk mengendalikan penyebaran penyakit ini di DKI Jakarta.

TINJAUAN PUSTAKA

Permasalahan terkait penyelesaian persamaan diferensial linier dan nonlinier dengan model epidemi SIR serta penerapan metode Euler dan Heun telah banyak dibahas di banyak buku dan jurnal berbeda. Dalam penyelesaian jurnal dan penelitian ini, penulis menggunakan beberapa artikel serta jurnal yang dijadikan sebagai sumber acuan. Beberapa jurnal dan artikel tersebut membahas mengenai penerapan model SIR menggunakan metode Euler dan Heun dalam menyelesaikan persamaan diferensial nonliniear.

Model SIR pertama kali dikemukakan oleh Kermack Mc Kendrick dan sudah banyak digunakan oleh para peneliti seperti Side (Side, 2015). Dalam penelitiannya, Side merumuskan model matematika dari penyebaran Tuberkulosis menggunakan model SIR. Model ini yang kemudian digunakan oleh peneliti dengan menerapkan metode yang telah dijelaskan. Dalam penelitian ini, penulis akan menyelesaikan model SIR menggunakan metode Euler dan metode Heun.

METODE PENELITIAN

Model Penyakit Tuberkulosis

Metode Euler merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang paling sederhana. Metode Euler juga sering disebut sebagai metode orde pertama karena persamaannya hanya mengambil sampai suku orde pertama saja (Geovanny, 2020). Diberikan persamaan diferensial biasa berikut ini (Griffiths10):

$$\frac{dx}{dt} = \mu_h - \beta_h x - \gamma\beta_h xy - \mu_h x \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta_h x - \alpha y \tag{2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma\beta_h xy - \eta z \tag{3}$$

dimana

$$x(t) = \frac{S_h}{N_h}, y(t) = \frac{I_h}{N_h}, z(t) = \frac{R_h}{N_h} \tag{4}$$

dan

$$\alpha = \mu_h + \delta_h, \eta = \mu_h + \phi_h, N_h = S_h + I_h + I_i + R_h \tag{5}$$

TABEL 1. Variabel dan Parameter dalam Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis tipe SIR (Side, 2015)

Variabel dan Parameter	Keterangan
S_h	Jumlah individu rentan
I_h, I_i	Jumlah individu yang terinfeksi I dan II
R_h	Jumlah individu sembuh
N_h	Konstanta jumlah seluruh populasi individu
μ_h	Rasio kelahiran atau kematian populasi individu
β_h	Rasio individu yang rentan
γ	Rasio individu yang diduga akan terinfeksi I ke infeksi II
δ_h	Rasio individu yang terinfeksi I ke populasi sembuh
ϕ_h	Rasio individu yang terinfeksi II ke populasi sembuh

Metode Euler

Metode Euler merupakan salah satu metode dalam menyelesaikan persamaan diferensial yang paling sederhana. Metode Euler juga sering disebut sebagai metode orde pertama karena persamaannya hanya mengambil sampai suku orde pertama saja (Geovanny, 2020). Diberikan persamaan diferensial biasa berikut ini (Griffiths, 2010):

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = f(x(t), t) \tag{6}$$

dengan $x(t_0) = x_0$ dan $t > t_0$. Metode Euler diturunkan dengan menyelesaikan persamaan (6) dimulai dengan menerapkan deret Taylor:

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{1}{2}h^2 x''(t) + \cdots \tag{7}$$

Misal $A_1(t) = \frac{1}{2}h^2 x''(i)$ dengan $i \in (t, t+h)$, maka persamaan (7) dapat ditulis:

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + A_1(t) \tag{8}$$

Selanjutnya persamaan (6) disubstitusi ke persamaan (8), sehingga diperoleh:

$$x(t+h) = x(t) + hf(x(t), t) + A_1(t) \tag{9}$$

Tetapkan $t_i = t_0 + ih$, dengan $I = (t_f - t_0)/h$ adalah jumlah langkah h mulai dari t_0 sampai t_f. Dengan menuliskan $t = t_i$ untuk $i < I$, Persamaan (9) dapat ditulis menjadi:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hf(x(t_i), t) + A_1(t_i) \tag{10}$$

dengan kondisi awal $x(t_0) = x_0$. Karena nilai $A_1(t)$ cukup kecil, sehingga diperoleh metode Euler:

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i), \qquad i = 0,1,2,3, \ldots \tag{11}$$

Metode Heun

Metode Heun merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah persamaan diferensial. Metode ini dikenal sebagai perbaikan dari metode Euler. Metode ini dikemukakan oleh Heun pada tahun 1900 sebagai hasil generalisasi dari metode Euler. Dalam metode Heun terdapat solusi perkiraan awal dari nilai yang didapat dari metode Euler yang disebut *predictor*. Selanjutnya *predictor* diperbaiki dan disebut sebagai *corrector* (Butcher, 2008). Penurunan rumus menggunakan metode Heun dilakukan dengan diberikan persamaan diferensial orde satu yang memiliki syarat awal

$$y(t_0 = y_0),$$

$$y'(t) = f(y(t), t) \tag{12}$$

Apabila persamaan (12) kedua ruasnya diintegralkan dengan batas t_i sampai t_{i+1} dengan $h = t_{i+1} - t_i$, maka diperoleh:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t)\,dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t), t)\,dt$$

$$y(t)\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t), t)\,dt$$

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t), t)\,dt$$

$$y_{i+1} - y_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t), t)\,dt$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t), t)\,dt \tag{13}$$

Selanjutnya $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t), t)\,dt$ dapat sicari menggunakan kaidah trapesium, sehingga diperoleh:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t), t)\,dt = \frac{[f(y_i, t_i) + f(y_{i+1}, t_{i+1})]}{2}(t_{i+1} - t_i)$$

atau

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t), t)\,dt = \frac{h}{2}[f(y_i, t_i) + f(y_{i+1}, t_{i+1})] \tag{14}$$

Substitusi persamaan (14) ke persamaan (13) sehingga diperoleh:

$$y_{i+1} = \frac{h}{2}[f(y_i, t_i) + f(y_{i+1}, t_{i+1})] \tag{15}$$

Persamaan (15) disebut persamaan metode Heun dengan y_{i+1} merupakan nilai hampiran sekarang (*predictor*) dan y_i adalah nilai hampiran sebelumnya, dengan $i = 0,1,2,\ldots,n$. Dengan demikian, persamaan Heun dapat dituliskan:

Predictor:

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(y_i, t_i) \tag{16}$$

Corrector:

$$y_{i+1} = \frac{h}{2}\left[f(y_i, t_i) + f\left(y_{i+1}^{(0)}, t_{i+1}\right)\right] \tag{15}$$

Galat

Galat menyatakan seberapa akurat solusi hampiran dengan solusi sejatinya. Semakin kecil nilai galatnya, maka akan semakin akurat solusi numerik yang diperoleh (Munir, 2010). Analisis galat pada solusi numerik akan dihitung dengan menggunakan pendekatan galat relatif hampiran. Rumus galat relatif hampiran yaitu:

$$\varepsilon_{RA} = \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}}, \qquad r = 0,1,2,\dots \tag{16}$$

dengan,

ε_{RA} = galat relatif hampiran

a_{r+1} = nilai hampiran iterasi sekarang

a_r = nilai hampiran iterasi sebelumnya

TAHAPAN PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur, di mana penulis mempelajari berbagai literatur terkait dengan subjek penelitian, termasuk buku dan jurnal. Fokus penelitian ini adalah merumuskan model SIR terhadap laju transmisi penyakit Tuberkulosis. Peneliti menyelesaikan model persamaan diferensial yang dihasilkan dengan menggunakan dua metode yaitu metode Euler dan metode Heun. Simulasi komputer dengan OCTAVE digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial menggunakan metode Euler dan metode Heun. Program ini membantu dalam perhitungan yang kompleks dan pembuatan grafik.

Penelitian ini dilakukan dalam beberapa tahap. Tahap pertama adalah mengkaji literatur yang relevan, termasuk buku, jurnal, artikel, dan makalah yang berkaitan dengan topik penelitian. Tahap kedua yaitu membuat model SIR terhadap laju transmisi penyakit Tuberkulosis (Side, 2015). Tahap ketiga adalah mencari solusi dari model matematika menggunakan metode Euler dan metode Heun. Tahap keempat adalah membandingkan nilai galat dari kedua metode untuk memperoleh pandangan yang lebih mendalam tentang keefektifan dan keakuratan kedua metode.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penyelesaian Model SIR Penyakit Tuberkulosis Metode Euler

Telah diperoleh persamaan diferensial nonlinear model SIR penyakit Tuberkulosis seperti pada persamaan (1)-(3).

$$\frac{dx}{dt} = \mu_h - \beta_h x - \gamma\beta_h xy - \mu_h x \tag{17}$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta_h x - (\mu_h + \delta_h)y \tag{18}$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma\beta_h xy - (\mu_h + \phi_h)z \tag{19}$$

Untuk menerapkan metode Euler pada model SIR penyakit Tuberkulosis, akan dilakukan konstruksi model seperti pada persamaan (11) sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$x(i+1) = x_i + h(\mu_h - \beta_h x_i - \gamma\beta_h x_i y_i - \mu_h x_i) \tag{20}$$

$$y(i+1) = y_i + h(\beta_h x_i - (\mu_h + \delta_h)y_i) \tag{21}$$

$$z(i+i) = z_i + h(\gamma\beta_h x_i y_i - (\mu_h + \phi_h)z_i) \tag{22}$$

dengan, $h = t_{i+1} - t_i, x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0,$ dan $i = 0,1,2,\dots.$ Untuk menyelesaikan Persamaan (17)-(19) dengan metode Euler pada persamaan (20)-(22), maka dibutuhkan data awal. Data jumlah TB dan parameter yang digunakan disajikan pada Tabel 2. Nilai awal yang digunakan dalam model simulasi model adalah data populasi di DKI Jakarta yang merupakan salah satu provinsi dengan jumlah kasus TB tertinggi di Indonesia. Nilai parameter yang digunakan merupakan asumsi rasional dengan mengacu pada nilai parameter pada kasus DBD (Side, 2015).

TABEL 2. Nilai Awal dan Parameter (Side, 2015)

Kondisi Awal dan Parameter	Nilai Kondisi Awal atau Parameter
$x(0)$	$\frac{10321625}{10644982}$
$y(0)$	$\frac{230515}{10644982}$
$z(0)$	$\frac{92846}{10644982}$
μ_h	0.000046
β_h	0.326666
γ	0.123111
δ_h	0.041230
ϕ_h	0.003700

Berikut adalah iterasi perhitungan dalam metode Euler:

$$x(i+1) = x_i + h(0.000046 - 0.326666x_i - 0.040216x_i y_i - 0.000046x_i) \quad (23)$$

$$y(i+1) = y_i + h(0.326666x_i - 0.041276y_i) \quad (24)$$

$$z(i+i) = z_i + h(0.041276x_i y_i - 0.003746z_i) \quad (25)$$

Diperoleh perhitungan dengan menerapkan data awal, $h = 0.1$ dan $i = 0,1,2,3, \ldots$ sebagai berikut:

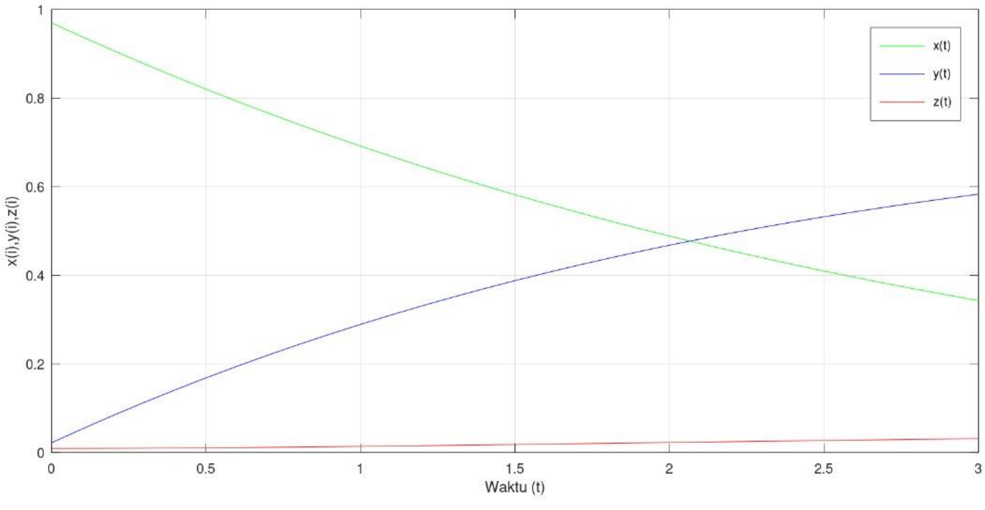
$$x_1 = x_0 + (0.1)(0.000046 - 0.326666x_0 - 0.040216x_0 y_0 - 0.000046x_0) \quad (26)$$

$$= 0.937864$$

$$y_1 = y_0 + (0.1)(0.326666x_0 - 0.041276y_0) = 0.053239 \quad (27)$$

$$z_1 = z_0 + (0.1)(0.041276x_0 y_0 - 0.003746z_0) = 0.008803 \quad (28)$$

Dengan menggunakan *software Octave*, iterasi dilanjutkan hingga $i = 3$ dan diperoleh nilai x_i, y_i dan z_i seperti pada Gambar 1.



GAMBAR 1. Grafik Penyebaran Penyakit dengan Metode Euler

Penyelesaian Model SIR Penyakit Tuberkulosis Metode Heun

Untuk menerapkan metode Heun pada Persamaan (17)-(19) akan dilakukan konstruksi model seperti pada persamaan (15)-(16) sehingga diperoleh:
Predictor:

$$x_{(i+1)}^{(0)} = x_i + h(\mu_h - \beta_h x_i - \gamma\beta_h x_i y_i - \mu_h x_i) \tag{29}$$

$$y_{(i+1)}^{(0)} = y_i + h(\beta_h x_i - (\mu_h + \delta_h) y_i) \tag{30}$$

$$z_{(i+1)}^{(0)} = z_i + h(\gamma\beta_h x_i y_i - (\mu_h + \phi_h) z_i) \tag{31}$$

Corrector:

$$\begin{aligned} x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}[(\mu_h - \beta_h x_i - \gamma\beta_h x_i y_i - \mu_h x_i) \\ +(\mu_h - \beta_h x_{i+1}^{(0)} - \gamma\beta_h x_{i+1}^{(0)} y_{i+1}^{(0)} - \mu_h x_{i+1}^{(0)})] \end{aligned} \tag{32}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[(\beta_h x_i - (\mu_h + \delta_h) y_i) + \left(\beta_h x_{i+1}^{(0)} - (\mu_h + \delta_h) y_{i+1}^{(0)}\right)\right] \tag{33}$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2}\left[(\gamma\beta_h x_i y_i - (\mu_h + \phi_h) z_i) + \left(\gamma\beta_h x_{i+1}^{(0)} y_{i+1}^{(0)} - (\mu_h + \phi_h) z_{i+1}^{(0)}\right)\right] \tag{34}$$

Perhitungan persamaan (17)-(19) menggunakan metode Heun pada persamaan (29)-(34) dapat dilakukan dengan memasukkan nilai awal pada Tabel 2, sehingga diperoleh:

Untuk $h = 0.1$ dan $i = 0,1,2,3, \ldots$ diperoleh
Predictor:

$$x_{(1)}^{(0)} = x_0 + (0.1)(0.000046 - 0.326666x_0 - 0.040216x_0 y_0 - 0.000046x_0) = 0.9378 \tag{35}$$

$$y_{(1)}^{(0)} = y_0 + (0.1)(0.326666x_0 - 0.041276y_0) = 0.05323 \tag{36}$$

$$z_{(1)}^{(0)} = z_0 + (0.1)(0.041276x_0 y_0 - 0.003746z_0) = 0.008803 \tag{37}$$

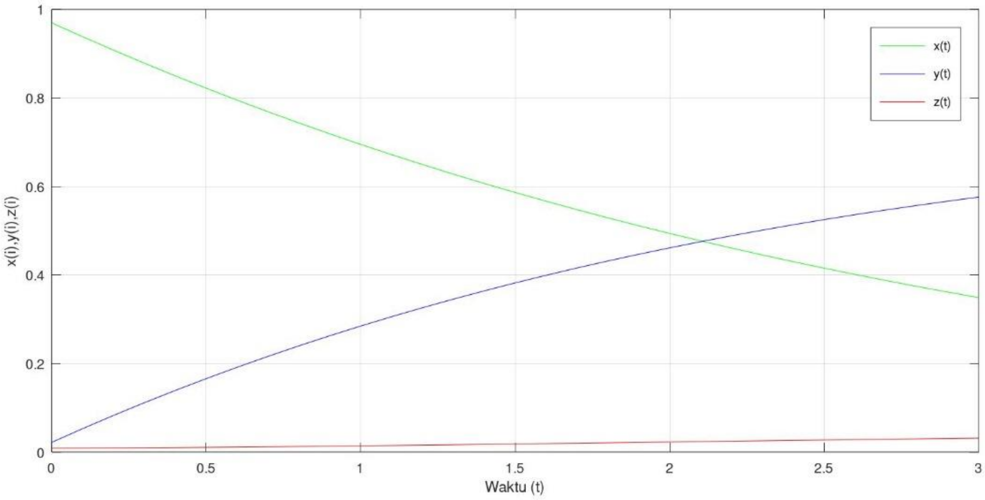
Corrector:

$$\begin{aligned} x_1 = x_0 + \frac{0.1}{2}[(0.000046 - 0.326666x_0 - 0.040216x_0 y_0 - 0.000046x_0) \\ +(0.000046 - 0.326666x_1^{(0)} - 0.040216x_1^{(0)} y_1^{(0)} - 0.000046x_1^{(0)})] \\ = -0.03336 \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} y_1 = y_0 + \frac{0.1}{2}[(0.326666x_0 - (0.041276)y_0) + \\ (0.326666x_1^{(0)} - 0.41276y_1^{(0)} = 0.588748 \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} z_1 = z_0 + \frac{0.1}{2}[(0.040216x_0 y_0 - 0.003746z_0) + \\ \left(0.040216x_1^{(0)} y_1^{(0)} - 0.003746z_1^{(0)}\right) = 0.015724 \end{aligned} \tag{40}$$

Dengan menggunakan *software Octave*, iterasi dilanjutkan hingga $i = 3$, maka akan diperoleh nilai x_i, y_i dan z_i seperti pada Gambar 2.



GAMBAR 2. Grafik Penyebaran Penyakit dengan Metode Heun

Perhitungan Galat

Setelah dilakukan simulasi menggunakan program Octave, didapatkan hasil analisis menggunakan metode Euler dan Heun sebagai berikut:

TABEL 3. Data Hasil Perhitungan Menggunakan Metode Euler dan Metode Heun

Metode Euler				Metode Heun			
i	X(i)	Y(i)	Z(i)	i	X(i)	Y(i)	Z(i)
0	0.969623	0.021655	0.008722	0	0.969623	0.021655	0.008722
0.1	0.937865	0.05324	0.0088032	0.1	0.938325	0.052656	0.008861
0.2	0.907027	0.083657	0.0090007	0.2	0.907927	0.082524	0.009109
0.3	0.877093	0.112941	0.0093025	0.3	0.878409	0.111292	0.009454
0.4	0.848044	0.141126	0.0096974	0.4	0.849756	0.138994	0.009885
0.5	0.81986	0.168247	0.0101751	0.5	0.821947	0.165662	0.010393
0.6	0.792524	0.194334	0.010726	0.6	0.794965	0.191327	0.010969
0.7	0.766017	0.219421	0.0113414	0.7	0.768791	0.21602	0.011606
0.8	0.740319	0.243539	0.0120131	0.8	0.743406	0.239771	0.012294
0.9	0.715411	0.266717	0.0127337	0.9	0.718793	0.262609	0.013028
1	0.691275	0.288986	0.0134963	1	0.694932	0.284564	0.0138
1.1	0.667891	0.310375	0.0142946	1.1	0.671805	0.305662	0.014606
1.2	0.645242	0.330912	0.0151229	1.2	0.649394	0.325931	0.015439
1.3	0.623307	0.350624	0.0159759	1.3	0.627681	0.345398	0.016295
1.4	0.602068	0.369538	0.0168489	1.4	0.606647	0.364088	0.017169
1.5	0.581508	0.38768	0.0177373	1.5	0.586276	0.382026	0.018057
1.6	0.561607	0.405076	0.0186373	1.6	0.566548	0.399237	0.018955
1.7	0.542348	0.421749	0.0195452	1.7	0.547447	0.415745	0.019861
1.8	0.523714	0.437725	0.0204578	1.8	0.528956	0.431572	0.02077
1.9	0.505686	0.453027	0.021372	1.9	0.511058	0.44674	0.02168
2	0.488248	0.467676	0.0222853	2	0.493737	0.461273	0.022589
2.1	0.471383	0.481695	0.0231953	2.1	0.476975	0.47519	0.023494
2.2	0.455074	0.495105	0.0240998	2.2	0.460757	0.488512	0.024394

2.3	0.439304	0.507927	0.0249968	2.3	0.445068	0.50126	0.025285
2.4	0.424059	0.520181	0.0258848	2.4	0.429891	0.513452	0.026168
2.5	0.409322	0.531887	0.0267623	2.5	0.415212	0.525107	0.02704
2.6	0.395078	0.543062	0.0276278	2.6	0.401017	0.536244	0.027901
2.7	0.381312	0.553727	0.0284803	2.7	0.387289	0.54688	0.028749
2.8	0.36801	0.563897	0.0293188	2.8	0.374017	0.557032	0.029582
2.9	0.355156	0.573591	0.0301423	2.9	0.361184	0.566717	0.030402
3	0.342738	0.582825	0.0309503	3	0.348779	0.575951	0.031205

Berdasarkan Tabel 3 yang menunjukkan hasil iterasi pada populasi SIR, maka diperoleh nilai galat seperti terlihat pada Tabel 4.

TABEL 4. Data Hasil Galat Menggunakan Metode Euler dan Metode Heun

Metode Euler			Metode Heun		
X	Y	Z	X	Y	Z
-0.03386	0.593258	0.009222	-0.03336	0.588748	0.015724
-0.034	0.363594	0.021943	-0.03348	0.361931	0.027184
-0.03413	0.259288	0.032442	-0.0336	0.258494	0.036456
-0.03425	0.199715	0.040721	-0.03372	0.199304	0.043627
-0.03438	0.161198	0.046948	-0.03383	0.160978	0.048899
-0.03449	0.134238	0.051361	-0.03394	0.134142	0.052537
-0.0346	0.114333	0.054261	-0.03405	0.114309	0.05481
-0.03471	0.099031	0.055914	-0.03415	0.099057	0.055995
-0.03482	0.086901	0.05659	-0.03424	0.086966	0.056319
-0.03492	0.077059	0.056504	-0.03434	0.077153	0.055985
-0.03501	0.068913	0.055846	-0.03443	0.069024	0.055156
-0.0351	0.062062	0.054771	-0.03451	0.062188	0.053967
-0.03519	0.05622	0.053393	-0.03459	0.056361	0.052526
-0.03528	0.051183	0.051813	-0.03467	0.051334	0.050906
-0.03536	0.046796	0.050087	-0.03475	0.046955	0.049183
-0.03544	0.042945	0.04829	-0.03482	0.04311	0.047395
-0.03551	0.039533	0.046451	-0.03489	0.039707	0.045582
-0.03558	0.036498	0.044609	-0.03496	0.036673	0.043775
-0.03565	0.033777	0.042776	-0.03502	0.033953	0.041988
-0.03572	0.031323	0.040982	-0.03508	0.031506	0.040232
-0.03578	0.029103	0.039232	-0.03514	0.029287	0.038525
-0.03584	0.027085	0.037531	-0.0352	0.027271	0.03687
-0.0359	0.025244	0.035885	-0.03525	0.025432	0.035273
-0.03595	0.023557	0.034306	-0.0353	0.023745	0.033732
-0.036	0.022008	0.032789	-0.03535	0.022195	0.032259
-0.03605	0.020578	0.031327	-0.0354	0.020769	0.030841
-0.0361	0.01926	0.029933	-0.03545	0.019449	0.029483
-0.03615	0.018035	0.028599	-0.03549	0.018225	0.028186
-0.03619	0.016901	0.02732	-0.03553	0.01709	0.026946
-0.03623	0.015844	0.026106	-0.03557	0.016033	0.025762

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang didapat, metode Euler dan metode Heun dapat digunakan untuk menyelesaikan model SIR penyebaran penyakit Tuberkulosis. Dari solusi numerik yang dihasilkan dapat disimpulkan bahwa hasil perhitungan menggunakan metode Euler dan metode Heun tidak terdapat perbedaan yang signifikan. Pada metode Euler nilai galat pada variabel Y (individu terinfeksi) menghasilkan nilai yang lebih kecil daripada metode Heun, sedangkan pada metode Heun nilai galat pada variabel X (individu rentan) menghasilkan nilai yang lebih kecil daripada metode Euler, dan pada variabel Z (individu sembuh) mulai iterasi 0,9 menunjukkan nilai galat yang lebih kecil daripada metode Euler. Dengan demikian, dari hasil perbandingan tersebut dapat disimpulkan bahwa metode Heun lebih akurat untuk menyelesaikan model SIR penyebaran penyakit Tuberkulosis.

UCAPAN TERIMAKASIH

Puji serta syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, atas berkat dan rahmat-Nya, sehingga kami dapat menyelesaikan penulisan artikel ini. Ucapan terima kasih kami sampaiakn kepada semua pihak yang telah memberikan arahan dan bimbingan selama pembuatan artikel ini.

REFERENSI

Abbasbandy, S. & Shivanian, E. 2009, ‘Application of the Variational Iteration Method for System of Nonlinear Volterra’s Integro-Differential Equations’, *Mathematical and Computational Applications’*, vol. 14, no. 2, pp. 147–158.

Butcher, J, C., 2008, ‘Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, England:John Wiley & Sons, Ltd.

Chapra, S. C. & Canale, R. P. 2010, ‘Numerical Methods for Engineers Sixth Edition’, New York (US): McGraw-Hill.

Geovanny, A. 2020, ‘Penentuan Galat Persamaan Diferensial Biasa orde 1 dengan Metode Numerik’, (Thesis, Universitas Quality)

Griffiths, D.F. & Higham, D. J. 2010, ‘Numerical Methods for Ordinary Differential Equations’. London: Springer.

Lestari, R. N. 2019, ‘Metode Runge Kutta Orde Empat pada Model Penyebaran Influenza dengan Populasi SIRC’ (Skripsi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).

Munir, R. 2010, ‘Metode Numerik’, Bandung: Informatika.

Ningsi, G. P. 2019, ‘Penerapan Metode Euler, Metode Heun, dan Metode Iterasi Variasional dalam Menyelesaikan Sistem Transmisi Tuberkulosis’, (Thesis, Universitas Sanata Dharma).

Ningsi, G. P & S. Mungkasi, 2021, Penerapan Metode Runge-Kutta dan Iterasi Variasional dalam Simulasi Transmisi Tuberkulosis, *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, pp. 147-157.

Odibat, Z. M. 2010, ‘A Study on the Convergence of Variational Iteration Method’, *Mathematical and Computer Modelling*, 51 (9-10), 1181-1192.

Pratiwi, R. R, Helmi, & Yudha, 2019, Penyelesaian Model Imunologi Seluler pada Tuberkulosis dengan Metode Extended Runge Kutta orde Empat, *Buletin Ilmiah Math. Stat. Dan Terapannya (Bimaster),* pp. 495-504.

Salehpoor, Jafari, E. H. & Afrapoli, M. A. 2010, ‘Revised Variational Iteration Method for Solving Systems of Ordinary Differential Equations,’ *Applications and Applied Mathematics: An International Journal, Special Issue’* no.1, pp. 110–121.

Sasongko, S. B. 2010, ‘Metode Numerik dengan scilab’, Yogyakarta; CV. ANDI OFFSET.

Setianingrum, P. S. & Mungkasi, S. 2017, ‘Variational Iteration Method Used to Solve the One-Dimensional Acoustic Equations’, *Journal of Physics: Conference Series* 856 (1), 012010 (1-7).

Side, S. 2015, ‘A Susceptible-Infected-Recovered Model and Simulation for Transmission of Tuberculosis’, *Advanced Science Letters,* vol. 21, no. 2, pp. 137–139.

Wu, G. C. & Lee, E.W.M., 2010, ‘Fractional Variational Iteration Method and its Application’, *Physics Letters A,* 374 (25), 2506-2509.

Yuliyanto, B. D. & Mungkasi, S. 2017 ‘Variational Iteration Method for Solving the Population Dynamics Model of Two Species’, *Journal of Physics: Conference Series’,* vol. 795, no. 1, art. 012044.