Pengembangan Program Pecahan Linier Dengan Transformasi Aljabar

Bobby Reynaldo[1], Ratna Widyati[2], Med Irzal[3]

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Jakarta
Jl. Rawamangun Muka, Rawamangun, Jakarta Timur 13220,
bobbyreynaldo@gmail.com

Abstrak

Penyelesaian program pecahan linier pada penelitian ini menggunakan tran- sformasi secara aljabar menjadi bentuk program linier yang lebih mudah didefi- nisikan. Setelah menjadi bentuk program linier kemudian diselesaikan menggu- nakan metode simpleks direvisi yang memiliki kelebihan dalam mengindentifi- kasi kasus khusus. Hasil optimal yang telah didapat ditransformasikan kembali dalam bentuk program pecahan linier. Juga dibuat sebuah aplikasi penyele- saiannya menggunakan metode tersebut untuk membantu perhitungan dengan cepat. Dari hasil pengujian untuk menyelesaikan permasalahan program pecahan linier dengan 10 variabel, 10 fungsi kendala, dan 10 kali iterasi, aplikasi mampu menyelesaikan seluruh proses hanya sekitar 0.026 detik.

Kata kunci : Optimasi, program pecahan linier, rasio, transformasi, program linier, metode simpleks direvisi.

1 PENDAHULUAN

Program pecahan linier adalah jenis khusus dari masalah program non-linier di mana fungsi tujuan berbentuk rasio. Rasio yang terdapat pada program pecahan linier dibentuk dari dua fungsi tujuan linier dan kendala yang masih berupa fungsi linier. Isbell dan Marlow (1956) yang pertama kali mengidentifikasi contoh masa- lah program pecahan linier dan dipecahkan dengan urutan masalah program linier (Pandian & Jayalakshmi, 2013).

Letak kelebihan program pecahan linier adalah pada fungsi tujuan yang berupa rasio. Rasio adalah perbandingan antara dua besaran atau lebih dimana perban- dingan harus menggunakan satuan yang sama. Rasio juga dapat diartikan sebagai suatu angka yang dapat menilai kinerja, menilai keefektifan ataupun menunjukkan hubungan antar suatu unsur dengan unsur lainnya. Optimasi dalam bentuk rasio se- ring ditemukan dalam permasalahan ekonomi, seperti analisis rasio likuiditas, rasio profitabilitas, rasio kepemilikan dan lainnya.

Sekarang ini sudah banyak metode yang dapat menyelesaikan permasalahan program pecahan linier diantaranya metode convex, metode transformasi Chaner dan Cooper, pecahan linier dengan fuzzy dan sebagainya. Penulisan ini membahas pendekatan transformasi baru sehingga program pecahan linier dapat ditransformasikan dan diselesaikan kedalam bentuk program linier. Metode ini dipilih karena secara manual program linier mudah.

2 KAJIAN TEORI

2.1 Matriks

Didefinisikan matriks terlebih dahulu karena seluruh pembahasan program pecahan linier dan program linier akan dibentuk dalam matriks.

Beberapa pendefinisian tentang matriks (Eiselt & Sandblom, 2007:1) yang akan digunakan adalah sebagai berikut.

Definisi 2.1.1. Matriks **A** adalah susunan dua dimensi dari elemen a_{ij} yang berukuran m baris dan n kolom (berordo $m \times n$) sehingga a_{ij} yang merupakan elemen dalam baris $\boldsymbol{i}$ dan kolom j . Jika $m = n$, dikatakan matriks persegi" jika $m = 1$ dikatakan vektor baris, jika $n = 1$ dikatakan vektor kolom, dan jika $m = n = 1$ dikatakan skalar.

Definisi 2.1.2. Suatu matriks $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ berordo $n \times n$, dapat dikatakan dengan matriks identitas apabila setiap elemen dengan elemen pada diagonal utamanya bernilai $a_{ij} = 1$ jika $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$ dan $a_{ij} = 0$ jika $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$. Matriks identitas dinotasikan dengan $\boldsymbol{I}$

Definisi 2.1.3. *Transpose* suatu matriks $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ berordo $m \times n$ adalah matriks $A^T = (a_{ij}^T)$ berordo $n \times m$ sedemikian sehingga $(a_{ij}) = (a_{ji}^T)$. Jika $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ dinamakan matriks simetris.

Definisi 2.1.4. Jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ matriks berordo $n \times n$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$, dimana $\boldsymbol{I}$ matriks identitas maka matriks $\boldsymbol{B}$ disebut invers dari matriks $\boldsymbol{A}$ dan matriks $\boldsymbol{A}$ invers dari matriks $\boldsymbol{B}$. Notasi invers matriks A adalah $\boldsymbol{A}^{-1}$

2.2 Program Linier

Program linier yang ditemukan oleh L.W Kantorovich pada tahun 1939 dengan metode yang masih terbatas. Pada permasalahan program linier dikenal dua macam fungsi, yaitu fungsi tujuan (*objective function*) dan fungsi batasan (*constraint function*). Fungsi tujuan yaitu fungsi yang dapat menggambarkan hasil yang dicapai dengan tujuan yang optimal. Fungsi batasan atau lebih dikenal dengan fungsi kendala adalah fungsi yang menjadi kondisi, syarat, atau batasan yang harus terpenuhi. Fungsi tujuan program linier dapat dirumuskan sebagai berikut

$$Maksimum\ Z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

dengan kendala

$$\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$$

Dalam penyelesaian permasalahan program linear, tanda sisi kanan kendala harus bernilai non negatif, jika tanda pada bagian sisi kanan kendala bernilai negatif maka persamaan tersebut harus dikalikan dengan bilangan -1 agar tanda pada bagian sisi kanan kendala bernilai positif.

2.2.1 Metode Simpleks Direvisi

Penggunaan metode simpleks ternyata bukan merupakan prosedur perhitung- an yang paling efektif dalam komputer. Alasannya karena metode simpleks masih mengerjakan beberapa variabel yang tidak diperlukan. Hal tersebut yang menda- sari perbaikan metode simpleks menjadi metode simpleks direvisi. Terdapat tiga tahapan dalam metode simpleks direvisi yaitu:

A. Perumusan Fungsi
B. Inisialisasi Matriks
C. Perhitungan (Penyelesaian)

2.2.2 Khasus Khusu

Kasus khusus yang dapat diidentivikasi oleh metode simpleks direvisi pada program linier adalah sebagai berikut:

- Optimasi alternative.
- Degenarasi.
- Solusit tak terbatas (*Unbounded*).
- Taka da daerah layak (*Infeasible*).

2.3 Program Pecahan Linier (PPL)

Program Pecahan Linier (PPL) secara luas dikembangkan oleh seorang matematikawan Hungaria B.Martos dan asosiasinya sekitar tahun 1960. Kelebihan metode ini ada pada fungsi tujuan yang merupakan sebuah pecahan (rasio). Fungsi tujuan program pecahan linier dapat dirumuskan sebagai berikut

$$Maksimum\ Z\ =\ \frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\beta}{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}+\alpha}$$

dengan kendala

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

dengan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}$ adalah variabel keputusan, $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ dan $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ adalah koefisien-koefisien yang diketahui, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ adalah matriks yang diketahui dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ adalah konstanta. Kendala permasalahan dibatasi wilayah layak $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{d}^T\ \boldsymbol{x}\ +\ \beta \neq 0\}$. (Charnes & Cooper, 1962)

3 REKAYASA MODEL

3.1 Transformasi Program Pecahan Linier

Asumsikan selalu terdapat daerah layak bukan himpunan, $S = \{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{d}^T\ \boldsymbol{x}\ +\ \beta \neq 0\}$ dan terbatas untuk $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$, dan $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $\beta > 0$, $\boldsymbol{d} = (d_{j1})$ dengan $d_{j1} \geq 0$, dan $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ dengan $a_{ij} \geq 0$, untuk $i = 1,2,3,\cdots,m$ $j = 1,2,3,\cdots,n$ untuk permasalahan program pecahan linier

$$Maksimum\ Z = \frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \beta}{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} + \alpha}$$

dengan kendala

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

akan ditransformasikan menjadi bentuk program linier dengan aljabar, menggunakan konstanta program pecahan linier yaitu α pada pembilang dan β pada penyebut dibentuk sebagai berikut

$$Z = \frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \beta}{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} + \alpha} = \frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \beta}{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} + \alpha} - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{(\boldsymbol{c}^T\beta - \boldsymbol{d}^T\alpha)\boldsymbol{x}}{\beta(\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} + \alpha)} + \frac{\alpha}{\beta}$$

didefinisikan

$$\boldsymbol{g}^T = \frac{\boldsymbol{c}^T\beta - \boldsymbol{d}^T\alpha}{\beta}; \quad \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} + \alpha}; \quad h = \frac{\alpha}{\beta}$$

didapatkan fungsi tujuan setelah transformasi yaitu

$$Z = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{x} + h$$

Kemuadn dicari fungsi kenda;anya. Invers fungsi dari $\boldsymbol{y}$ didapatkan sebagai berikut

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{y}\beta}{1 - \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{y}}$$

kemudian dimasukan pada kendala maka kendala setelah transformasi menjadi

$$(\boldsymbol{A}\beta + \boldsymbol{b}\boldsymbol{d}^T)\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b}$$

didefinisikan

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}\beta + \boldsymbol{b}\boldsymbol{d}^T$$

maka di dapatkan kendala setelah transfromasi yaitu

$$\boldsymbol{Ky} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

Catatan 3.1.1. Konstanta pada program linier akan dimasukkan setelah didapat hasil yang optimal, maka persamaan program linier yang akan diproses pada metode simpleks direvisi adalah

$$Z = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{x}$$

Kemudian optimasi yang didapa ditambah konstanta h untuk mendapatkan hasil akhirnya

3.2 Langkah – Langkah Penyelesaian Manual

Untuk menyelesaikan optimasi program pecahan linier dengan transformasi menggunakan aljabar konstanta menjadi bentuk program linier, terdapat tiga tahapan yang harus dikerjakan yaitu:

A. Transformasi program pecahan linier menjadi program linier.
B. Penyelesaian program linier dengan metode simpleks direvisi.
C. Trasnformasi kembali variabel keputusan $\boldsymbol{y}$ menjadi $\boldsymbol{x}$.

3.3 Pembuatan Aplikasi Program Pecahan Linier

Langkah dalam membuat aplikasi yaitu:

- Menentukan perangkat lunak yang digunakan
- Membangun Algoritma
- Membuat fungsi pemrograman
- Membuat *infterface*-nya

4 APLIKASI HASIL MODEL

4.1 Contoh Kasus Program Pecahan Linier

Seseorang ingin menginvestasikan asetnya dalam bidang !urniture. Bahan da- sar yang sering digunakan yaitu kayu jati, kayu sungkai, kayu akasia, dan kayu mahoni. Furniture yang dibuat dari bahan tersebut adalah 1 set lengkap (meja lemari kursi pintu jendela dll) untuk rumah bertipe besar. Diperlukan biaya awal untuk membeli peralatan-peralatan dan mesin sekitar 700 juta. Gudang sudah ter- sedia dan dapat menampung bahan mentah untuk dijadikan sekitar 20 set lengkap. Untuk memaksimalkan gudang yang sudah tersedia maka gudang harus terisi minimal untuk 16 set lengkap. Dengan menggambil contoh data beberapa perusahaan di bidang furniture, didapatkan rata-rata biaya yang habiskan untuk membuat furni- ture 1 set lengkap dengan berbagai bahan kayu terdapat dalam table berikut (dalam Juta)

Tabel 1: Rata-rata Daftar Harga Furniture

Jenis Kayu	Bahan Mentah (Log Kayu)	Pegawai	Bahan Kimia	Peralatan Sekali Pakai	Biaya Operasional dan tahap finisihing	Rata-rata Harga Jual 1 Set Lengkap
Jati	148	30	8	11	6	347
Sungkai	126	27	7	10	5	246
Akasia	110	24	7.5	8.5	4	233
Mahoni	96	21	7	9	4	228

Maksimal investasi yang akan di berikan pada setiap bidang adalah sebagai berikut:

Investasi biaya maksimal untuk bahan mentah (log kayu) : 2 Miliar
Investasi biaya maksimal untuk pegawai : 420 Juta
Investasi biaya maksimal untuk bahan kimia : 125 Juta

Investasi biaya maksimal untuk peralatan sekali pakai : 160 Juta
Investasi biaya maksimal untuk operasional dan finisihing : 100 Juta

Dengan kebutuhan dana sebesar itu terlalu beresiko jika hanya memikirkan keuntungan yang maksimal. Untuk itu fungsi tujuan utama adalah memaksimalkan rasio pengembalian dana investasi, atau dengan kata lain memaksimalkan seluruh hasil penjualan dengan meminimalkan dana investasi yang digunakan.

4.2 Hasil Penyelesaian Contoh Kasus Menggunakan Aplikasi

Pada contoh kasus yang sudah diberikan terdapat data yang dapat di bangun menjadi suatu fungsi. Untuk membangun fungsi di didefinisikan variabelnya yaitu

x_l : satu set lengkap furniture dengan bahan dasar kayu jati.
x_2 : satu set lengkap furniture dengan bahan dasar kayu sungkai.
x_3 : satu set lengkap furniture dengan bahan dasar kayu akasia.
x_4 : satu set lengkap furniture dengan bahan dasar kayu mahoni.

Tahap selanjutnya adalah mengidentifikasikan fungsi tujuannya. Karena tujuan utamanya memaksimalkan seluruh hasil penjualan dengan meminimalkan dana investasi yang digunakan maka akan dibuat fungsi tujuan dengan membandingkan harga jual dengan modal yang dibutuhkan. Fungsi tujuan dapat dibentuk sebagai berikut

$$\text{Memaksimalkan } Z = \frac{347x_1 + 246x_2 + 233x_3 + 228x_4}{203x_1 + 175x_2 + 154x_3 + 137x_4 + 700}$$

Setalah menentukan fungsi tujuan, langkah selanjutnya adalah mengidentifikasi adalah fungsi kendalanya dari contoh data yang dimiliki sebagai berikut:

1. Karena keterbatasan investasi pada bahan mentah, maka didapatkan

$$148x_l + 126x_2 + 110x_3 + 96x_4 \leq 2000$$

2. Karena keterbatasan investasi untuk pegawai, maka didapatkan

$$30x_l + 27x_2 + 24x_3 + 21x_4 \leq 420$$

3. Karena keterbatasan investasi pada bahan kimia, maka didapatkan

$$8x_1 + 7x_2 + 7.5x_3 + 7x_4 \leq 125$$

4. Karena keterbatasan investasi pada peralatan yang sekali pakai, maka didapatkan

$$11x_1 + 10x_2 + 8.5x_3 + 9x_4 \leq 160$$

5. Karena keterbatasan investasi biaya operasional dan tahap finisihing, maka didapatkan

$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 100$$

6. Untuk memaksimalkan gudang maka didapatkan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 16$$

Funsi tujuan dan fungsi kendala kini telah lengkap. Selanjutnya penyelesaian contoh kasus di atas menggunakan aplikasi penghitungan program pecahan liner adalah sebagai berikut. Hasil transformasi fungsi tujuan program pecahan linier menjadi program linier yaitu

$$Z = 347y_1 + 246y_2 + 233y_3 + 228y_4 + 0$$

Hasil transformasi fungsi kendala sebagai berikut

$$\begin{aligned}
509600y_1 &+ 438200y_2 + 385000y_3 + 341200y_4 \leq 2000 \\
106260y_1 &+ 92400y_2 + 81480y_3 + 72240y_4 \leq 420 \\
30975y_1 &+ 26775y_2 + 24500y_3 + 22025y_4 \leq 125 \\
40180y_1 &+ 35000y_2 + 30590y_3 + 28220y_4 \leq 160 \\
24500y_1 &+ 21000y_2 + 18200y_3 + 16500y_4 \leq 100 \\
3948y_1 &+ 3500y_2 + 3164y_3 + 2892y_4 \geq 16
\end{aligned}$$

Hasil dari variabel keputusan adalah

$$\begin{aligned}
y_1 &= 0.00233918 \quad ; \quad x_1 = 8 \\
y_2 &= 0 \quad ; \quad x_2 = 0 \\
y_3 &= 0 \quad ; \quad x_3 = 0 \\
y_4 &= 0.00233918 \quad ; \quad x_4 = 8
\end{aligned}$$

Dengan hasil optimal yaitu

$$Z = 1.34503$$

artinya rasio terbesar dari hasil penjualan adalah sebesar 1.34503 kali dibandingkan dengan modal investasi yang digunakan.

4.3 Analisis Dan Kinerja Aplikasi

Tujuan utama pembuatan aplikasi adalah menyelesaikan permasalahan dengan cepat. Dari hasil pengujian untuk menyelesaikan permasalahan program pecahan linier dengan 10 variabel, 10 fungsi kendala, dan 10 kali iterasi, aplikasi mampu menyelesaikan seluruh proses hanya sekitar 0.026 detik.

5 PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan di atas, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Transformasi program pecahan linier menjadi bentuk program linier adalah sebagai berikut

$$Z = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}$$

dengan

$$\boldsymbol{g}^T = \frac{\boldsymbol{c}^T\beta - \boldsymbol{d}^T\alpha}{\beta}; \quad \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} + \alpha}; \quad h = \frac{\alpha}{\beta}$$

dan fungsi kendala setelah trasnformasi menjadi

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

dengan

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}\beta + \boldsymbol{b}\boldsymbol{d}^T$$

2. Transformasi hasil optimal dari program linier yaitu y ditransformasi kembali menjadi bentuk program pecahan linier yaitu x adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{y}\beta}{1 - \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{y}}$$

3. Dibuat perangkat lunak yaitu sebuah aplikasi penghitungan program pecahan linier menggunakan MATLAB R2012b untuk membantu penghitungan dengan cepat. Dari hasil pengujian untuk menyelesaikan permasalahan program pecahan linier dengan 10 variabel, 10 fungsi kendala, dan 10 kali iterasi, aplikasi mampu menyelesaikan seluruh proses hanya sekitar 0.026 detik.

5.2 Saran

Berikut beberapa saran untuk pengembangan selanjutnya adalah sebagai berikut:

- Aplikasi yang sudah dibuat masih memiliki banyak kelemahan, salah satunya tidak bisa membaca konstanta bila ditulis paling awal sebelum variabel, untuk itu aplikasi masih harus dilakukan pemuktahiran
- Penyelesaian program pecahan linier masih menggunakan asumsi, untuk penelitian selanjutnya dapat mengembangkan penyelesaian program pecahan linier dengan lebih luas dan tanpa menambahkan asumsi.
- Penyelesaian program linier menggunakan metode simpleks direvisi dapat di- kembangakan dengan metode lainnya seperti metode primal dual path follo- wing titik interior, convex set atau dengan metode lain tentu dengan menekankan kelebihan metode masing-masing.

DAFTAR PUSTAKA

Bitran, G.R. and A.G. Novaes, 1973. "Linear Programming with a Fractional Objective Function". Operations Research, 21(1), 22-29. [ONLINE] Tersedia: http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/opre.21.1.22 Diakses Sabtu, 12 Maret 2016 Pukul 16.07 WIB.

Chandra, S. Jayadeva. and Aparna M. 2009. Numerical Optimization Applications.
Alpha Science International.

Charnes, A. and W.W. Cooper, 1962. "Programming with linear fractional". Naval Research Logistics Quaterly, Vol. 9: 181-186. [ONLINE] Tersedia: http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nav.v9:3-4/issuetoc Diakses Minggu, 6 Desember 2015 Pukul 18.31 WIB.

Dantzig, G.B, Thapa, M.N. 1997. Linear Programming 1 : Introduction. New York
: Springer Berlin Heidelberg.

Dimyati, Tjutju T., Dimyati, Ahmad. 2003. Operation Research, Model-model Pengambilan Keputusan. Bandung: Sinar Baru Algesindo.

Eiselt, H.A., Sandblom, C.-L. 2007. Linear Programming and its Application. New
York : Springer Berlin Heidelberg.

Hillier and Lieberman. Terjemahan : Dewa, P.M, The Jin Ai, Wigati, Selamat Setio, Hardjono, D. 2008. Penelitian Operasional. Yogyakarta : ANDI.

Pandian, P. and M. Jayalakshmi, 2013. "On Solving Linear Fractional Programming Problems", Modern Applied Science, Vol. 7, No. 6; 2013. [ONLINE] Tersedia: http://dx.doi.org/10.5539/mas.v7n6p90 Diakses Minggu, 6 Desember 2015 Pukul 15.22 WIB.

Saha, S.K., dkk. 2015. "A New Approach of Solving Linear Fractional Programming Problem (LFP) by Using Computer Algorithm". Open Journal of Optimization, 4, 74-86. [ONLINE] Tersedia: http://dx.doi.org/10.4236/ojop.2015.43010 Diakses Senin, 7 Desember 2015 Pukul 20.42 WIB.

Zuhanda, M. Khahfi. 2013. "Optimasi Prgoram Linier Pecahan Dengan Fungsi Tujuan Berkoefisien Interval". Skripsi. FMIPA, Matematika, Universitas Sumatra Utara.