Hubungan antara Integral Henstoock dengan Integral Henstock-Delta pada Skala Waktu

Albert Parulian, Sudarwanto, Ibnu Hadi.
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Jakarta

Abstrak *Penelitian ini membahas bagaimana hubungan antara Integral Henstock dengan Integral Henstock-Delta pada skala waktu. Konsep dasar dari kedua integral tersebut terletak pada pembentukan partisi* $\delta - fine$ *yang muncul pada konsep Integral Riemann. Perluasan konsep* $\delta - fine$ *ini yang menjadi dasar dalam hubungan antara Integral Henstock dengan Integral Henstock-Delta pada skala waktu. Hubungan tersebut tertuang dalam teorema, misalkan* f *terdefinisikan pada skala waktu dan* f^* *didefinisikan oleh*

$$f^*(t) = \begin{cases} f(a_k) & jika, t \in (a_k, b_k); \\ f(t) & jika, t \in [a,b]_{\mathbb{T}}. \end{cases}$$

sehingga jika f^* *terintegralkan Henstock pada selang* $[a,b]$ *maka* f *terintegralkan Henstock-Delta pada skala waktu.* **Kata kunci** : Integral Riemann, Integral Henstock, Integral Henstock-Delta, skala waktu, partisi $\delta - fine$.

I. Pendahuluan

Integral merupakan salah satu konsep matematis yang mempunyai peranan penting dalam dunia matematika, sejarah penemuan dan pengembangannya pun cukup panjang. Pada awalnya adalah Archimedes yang menemukan ide penjumlahan untuk menentukan luas sebuah daerah tertutup dan volume benda putar, lalu Leibniz memperkenalkan notasi $\int$ sebagai simbol dari integral. Seiring dengan perkembangan jaman dan ilmu pengetahuan, konsep integral pun semakin berkembang. Sampai saat ini sudah banyak jenis integral yang ada, seperti Integral Riemann, Integral Lebesque, Integral Denjoy-Perron, dan Integral Henstock.

Integral Henstock memiliki konsep yang mirip dengan Integral Riemann, mereka juga mempunyai interpretasi yang sama, yaitu luas daerah di bawah suatu fungsi. Tetapi ada beberapa fungsi yang tidak bisa diintegralkan secara Riemann namun dapat diintegralkan secara Henstock, contohnya adalah fungsi karakteristik bilangan rasional pada selang $[0,1]$. Penemuan konsep pada Integral Henstock menjadi sebuah terobosan dalam dunia matematika. Konsep Integral Henstock juga dapat diterapkan dalam konsep matematika lainnya, salah satunya adalah skala waktu.

Sumardi (2009) membahas mengenai hubungan antara Integral Henstock dengan Integral Perron, di mana jika sebuah fungsi terintegralkan Henstock maka fungsi tersebut terintegralkan Perron, begitu juga sebaliknya. Pada penelitian ini dibahas hubungan antara Integral Henstock dengan Integral Henstock-Delta pada skala waktu. Pembahasan dalam penelitian ini diawali dengan definisi dari Integral Riemann, Integral Henstock, dan skala waktu, lalu akan dibahas mengenai definisi dari Integral Henstock-Delta pada skala waktu, selanjutnya dibahas mengenai hubungan antara Integral Henstock dengan Integral Henstock-Delta pada skala waktu.

II. Landasan Teori

A. Integral Riemann

Fungsi $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Riemann pada $[a,b]$ jika ada sebuah bilangan $L \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta_\varepsilon > 0$ sehingga jika $\dot{P}$ adalah setiap partisi bertanda dari $[a,b]$ dengan $\|\dot{P}\| < \delta_\varepsilon$, maka $|S(f;\dot{P}) - L| < \varepsilon$. Himpunan dari semua fungsi yang terintegralkan Riemann pada $[a,b]$ dinotasikan sebagai $R[a,b]$.

B. Integral Henstock

Gauge pada interval $[a,b]$ adalah sebuah fungsi positif $\delta:[a,b]\to(0,\infty)$. Selanjutnya, partisi bertanda $\dot{P}:=\{(I_i,t_i)\}_{i=1}^{n}$ pada $[a,b]$ di mana $I_i:=[x_{i-1},x_i]$, dikatakan $\delta-fine$ jika memenuhi $t_i\in I_i\subseteq[t_i-\delta(t_i),t_i+\delta(t_i)]$ untuk $i=1,2,3,\ldots,n$.

Fungsi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dikatakan terintegralkan Henstock pada $[a,b]$ jika ada sebuah bilangan $L\in\mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon>0$ ada sebuah gauge δ_ε pada $[a,b]$ sehingga jika $\dot{P}$ adalah setiap partisi δ_ε -*fine* pada $[a,b]$, maka $\left|S(f;\dot{P})-L\right|<\varepsilon$. Himpunan dari semua fungsi yang terintegralkan Henstock pada $[a,b]$ dinotasikan sebagai $H[a,b]$.

C. Skala Waktu

Skala waktu $\mathbb{T}$ merupakan setiap himpunan bagian dari bilangan riil $\mathbb{R}$ yang tak kosong dan memiliki interval tertutup. Contoh dari skala waktu adalah bilangan riil, bilangan bulat, dan bilangan asli, sedangkan contoh yang bukan merupakan skala waktu adalah bilangan kompleks dan interval buka $(0,1)$.

Misalkan $\mathbb{T}$ merupakan skala waktu, maka didefinisikan untuk setiap $t\in\mathbb{T}$ adalah

1. loncatan maju $\sigma(t):=\inf\{z>t:z\in\mathbb{T}\}$;
2. loncatan mundur $\rho(t):=\sup\{z<t:z\in\mathbb{T}\}$.

Misalkan $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ maka didefinisikan $f^{\Delta}(t)$ adalah bilangan dengan kondisi jika diberikan untuk setiap $\varepsilon>0$, ada lingkungan U dari t sehingga $\left|\left[f(\sigma(t))-f(s)\right]-f^{\Delta}(t)\left[\sigma(t)-s\right]\right|\le\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|$, untuk setiap $s\in U$ dan $f^{\Delta}(t)$ disebut delta derivatif dari f pada t.

D. Integral Henstock-Delta pada Skala Waktu

Dikatakan $\delta=(\delta_L,\delta_R)$ merupakan sebuah $\Delta-gauge$ pada $\left[a,b\right]_{\mathbb{T}}$ dengan syarat $\delta_L(t)>0$ pada $\left(a,b\right]_{\mathbb{T}}$, $\delta_R(t)>0$ pada $\left[a,b\right)_{\mathbb{T}}$, dan $\delta_L(a)\ge0$, $\delta_R(b)\ge0$, dan $\delta_R(t)\ge\mu(t)$ untuk setiap $t\in\left[a,b\right)_{\mathbb{T}}$. Jika δ merupakan $\Delta-gauge$ pada $\left[a,b\right]_{\mathbb{T}}$, maka partisi bertanda $\dot{P}$ dikatakan $\delta-fine$ jika $\xi_i-\delta_L(\xi_i)\le t_{i-1}\le t_i\le\xi_i+\delta_R(\xi_i)$, untuk $1\le i\le n$.

Dikatakan $f:\left[a,b\right]_{\mathbb{T}}\to\mathbb{R}$ terintegralkan Henstock Delta pada $\left[a,b\right]_{\mathbb{T}}$, dengan nilai integralnya $L=H\int_a^b f(t)\Delta t$, jika untuk setiap $\varepsilon>0$ ada sebuah $\Delta-gauge$, δ, pada $\left[a,b\right]_{\mathbb{T}}$ sehingga $\left|L-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(t_i-t_{i-1})\right|<\varepsilon$, untuk setiap $\dot{P}$ partisi $\delta-fine$ pada $\left[a,b\right]_{\mathbb{T}}$.

III. Pembahasan

A. Teorema Pendukung

Fungsi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ terintegralkan Henstock pada $[a,b]$ jika dan hanya jika f terintegralkan Henstock-Delta pada$[a,b]$.

B. Hubungan Antara Integral Henstock dengan Integal Henstock-Delta pada Skala Waktu

Teorema :
Jika $f^*:[a,b]\to\mathbb{R}$ terintegralkan Henstock pada selang $[a,b]$, maka $f:[a,b]_{\mathbb{T}}\to\mathbb{R}$ terintegralkan Henstock-Delta pada skala waktu $[a,b]_{\mathbb{T}}$.

Bukti :
Sebelum membuktikan teorema, definisikan fungsi $f^*:[a,b]\to\mathbb{R}$ dengan

$$f^*(t)=\begin{cases} f(a_k) & jika, t\in(a_k,b_k); \\ f(t) & jika, t\in[a,b]_{\mathbb{T}}. \end{cases}$$

di mana $f:[a,b]_{\mathbb{T}}\to\mathbb{R}$ merupakan fungsi pada $[a,b]_{\mathbb{T}}$ dan $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ merupakan barisan dari interval berdampingan ke $[a,b]_{\mathbb{T}}$ pada $[a,b]$.

Misalkan $f^*:[a,b]\to\mathbb{R}$ terintegralkan Henstock pada $[a,b]$ dan misalkan $\varepsilon>0$. Berdasarkan Teorema Pendukung, fungsi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ terintegralkan Henstock pada $[a,b]$ jika dan hanya jika f terintegralkan Henstock-Delta pada $[a,b]$, maka $f^*:[a,b]\to\mathbb{R}$ terintegralkan Henstock-Delta pada $[a,b]$ sehingga ada $\Delta-gauge$ $\delta=(\delta_L,\delta_R)$ pada $[a,b]$ sehingga $\left|S(f^*;\dot{P})-(H)\int_a^b f^*\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, untuk setiap partisi $\delta-fine$ Henstock $\dot{P}$ pada $[a,b]$. Definisikan $\Delta-gauge$ $\delta^*=(\delta_L^*,\delta_R^*)$ pada skala waktu $[a,b]_{\mathbb{T}}$,

$\delta_L^*(t)=\delta_L(t)$ dan

$$\delta_R^*(t)=\begin{cases}\delta_R(t) & jika, t-padatkananpada[a,b]_{\mathbb{T}}; \\ \sigma(t)-t & jika, t-menyebarkananpada[a,b]_{\mathbb{T}}.\end{cases}$$

Setelah mendefinisikan $\Delta-gauge$ pada skala waktu $[a,b]_{\mathbb{T}}$, sekarang misalkan $D=\{(\xi_i,[t_{i-1},t_i])\}_{i=1}^{n}$ sebagai partisi δ^*-fine pada skala waktu $[a,b]_{\mathbb{T}}$. Lalu definisikan

$A\ =i:\xi_i-titikmenyebarkananpada[a,b]_{\mathbb{T}}-dan-[\xi_i,\sigma(\xi_i)]\subset[t_{i-1},t_i]$

$A_1=i\in A:t_{i-1}=\xi_i$

$A_2=i\in A:t_{i-1}<\xi_i$

B ={1,2,3,...,n} - A

Misalkan $D_o=\{(\xi_i,[t_{i-1},t_i]):i\in B\}$, maka D_o merupakan partisi $\delta-fine$ pada selang $[a,b]$. Untuk setiap $i\in A$, ada partisi $\delta-fine$ D_i' dari $[\xi_i,\sigma(\xi_i)]$ sehingga

$$\left| S\left(f^*, D_i^{'}\right) - (H)\int_{\xi_i}^{\delta(\xi_i)} f^* \right| < \frac{\varepsilon}{2n}$$

Untuk setiap $i \in A$, misalkan

$$D_i = \begin{cases} D_i^{'} & jika, i \in A; \\ D_i^{'} \cup \left\{\left(\xi_i, [t_{i-1}, t_i]\right)\right\}_{i=1}^{n} & jika, i \in A_2. \end{cases}$$

Maka $D = D_o \bigcup \left[\bigcup_{i \in A} D_i\right]$ adalah partisi $\delta -$ *fine* pada selang [a,b] dan didapat

$$\left|S(f;D)-(H)\int_a^b f^*\right| \leq \left|S(f;D)-S(f^*;\dot{P})\right| + \left|S(f^*;\dot{P})-(H)\int_a^b f^*\right|$$

$$\leq \sum_{i\in A_1}\left|f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - S(f^*;D_i)\right| + \sum_{i\in A_2}\left|f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - S(f^*;D_i)\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \sum_{i\in A_1}\left|f(\xi_i)(\sigma(\xi_i)-\xi_i) - S(f^*;D_i^{'})\right| + \sum_{i\in A_2}\left|f(\xi_i)(\sigma(\xi_i)-\xi_i) - S(f^*;D_i^{'})\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \sum_{i\in A}\left|(H)\int_{\xi_i}^{\sigma(\xi_i)} f^* - S(f^*;D_i^{'})\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Maka terbukti jika $f^* : [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Henstock pada selang [a,b], maka $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ terintegralkan Henstock-Delta pada skala waktu $[a,b]_{\mathbb{T}}$.

C. Penutup

Konsep dalam Integral Riemann merupakan dasar untuk Integral Henstock dan Integral Henstock-Delta pada skala waktu. Pengaruh dari partisi bertanda pada Integral Riemann menjadikan ide dasar dalam pengembangan Integral Henstock dan Integral Henstock-Delta pada skala waktu. Adapun hubungan Integral Henstock dengan Integral Henstock-Delta pada skala waktu sebagai berikut, sebuah fungsi terintegralkan Henstock-Delta pada skala waktu merupakan syarat perlu untuk sebuah fungsi terintegralkan Henstock, dan sebuah fungsi terintegralkan Henstock merupakan syarat cukup untuk sebuah fungsi terintegralkan Henstock-Delta pada skala waktu.

Pustaka

[Peterson(2006)] A. Peterson and B. Thompson. 2006. *Henstock-Kurzweill Delta and Nabla Integrals*. Journal Mathematical Analytic and Applications vol 323 page 162-178.

[Bohner(2001)] A. Peterson and M. Bohner. 2001. *Dynamic Equations on Time Scales, An Introduction with Aplications*. Preliminary Version from April 23,2001.

[Herschlag(2006)] G. Herschlag. 2006. *A Brief Introduction to Gauge Integration*.

[Jae(2013)] J.M Park, Y.K Kim, D.H Lee, J.H Yoon, and J.T Lim. 2013. *The Henstock and Henstock Delta Integrals*. Journal of the Chungcheong Mathematical Society vol 26 no.2 page 435-439.

[Jae(2013)] J.M Park, Y.K Kim, D.H Lee, J.H Yoon, and J.T Lim. 2013. *The Relation Between Henstock Integral and Henstock Delta Integral on Time Scales*. Journal of the Chungcheong Mathematical Society vol 26 no.3 page 625-629.

[Jae(2013)] J.M Park, Y.K Kim, D.H Lee, J.H Yoon, and J.T Lim. 2013. *Convergence Theorems for the Henstock Delta Integral on Time Scales*. Journal of the Chungcheong Mathematical Society vol 26 no.4 page 879-885.

[Bartle(2010)] R.G Bartle and D.R Sherbert. 2010. *Introduction to Real Analysis Fourth Edition*. Urbana, Illinois.

[Hilger(1988)] S.Hilger. 1988. *Ein Mabkettenkalkul mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeite*}. PhD thesis, Universitat Wurzburg.

[Sumardi(2009)] Sumardi. 2009. Hubungan Antara Integral Henstock Dengan Integral Perron. Penelitian, Universitas Negeri Jakarta.