JMT (Jurnal Matematika dan Terapan) **7** (2) (2025), 70-82
https://doi.org/10.21009/jmt.7.2.4
e-ISSN: 2615-6792

Implementasi Matriks Leslie dalam Estimasi Laju Pertumbuhan Populasi Wanita di Jawa Barat

Sulthan Ahmad Naufal[a)], Aldi Fariz Wiransyah[b)], Muhammad Andrian Pradana[c)], Satrio Setio Nuswantoro[d)]

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Jakarta
Jalan Rawamangun Muka Raya RT 11/RW 14 Jakarta Timur 13220, Indonesia

Email: [a)]sulthan.ahmad.naufal@mhs.unj.ac.id, [b)]aldi.fariz.wiransyah@mhs.unj.ac.id, [c)]muhammad.andrian.pradana@mhs.unj.ac.id, [c)]satrio.setio.nuswantoro@mhs.ac.id

Abstract

This study discusses the application of the Leslie Matrix to project changes in the female population in West Java Province by incorporating variables such as age distribution, fertility rates, and survival rates. Secondary data in the form of the number of women by age group in 2020 and 2025, along with birth data, were used in calculating fertility and survival rate parameters. These parameters were then arranged into a 16×16 Leslie Matrix, which was used to estimate the female population in 2030 and assess its growth trend through dominant eigenvalues. The analysis results show that the female population in 2030 is predicted to reach 28.422.685, with an error margin of 5,62% when compared to the BPS projection, which is included in the very accurate category. The dominant eigenvalue obtained, which is $0{,}9988 (< 1)$, indicates a downward trend in female population growth in the long term. These findings show that the Leslie Matrix is capable of providing a representative and fairly accurate picture of the dynamics of the female population in West Java, making it a suitable reference for population policy planning that takes age structure into account.

Keywords: Leslie Matrix, Eigen Value, Population Growth

Abstrak

Penelitian ini membahas penerapan Matriks Leslie untuk memproyeksikan perubahan jumlah penduduk perempuan di Provinsi Jawa Barat dengan memasukkan variabel distribusi umur, tingkat kesuburan, serta tingkat kelangsungan hidup. Data sekunder berupa jumlah perempuan berdasarkan kelompok umur tahun 2020 dan 2025, beserta data kelahiran, digunakan dalam perhitungan parameter fertilitas dan tingkat ketahanan hidup. Parameter tersebut kemudian disusun ke dalam Matriks Leslie berukuran 16×16, yang dipakai untuk memperkirakan populasi perempuan tahun 2030 serta menilai kecenderungan pertumbuhannya melalui nilai eigen dominan. Hasil analisis menunjukkan bahwa populasi wanita pada tahun 2030 diprediksi mencapai 28.422.685 jiwa, dengan selisih error sebesar 5,62% jika dibandingkan dengan proyeksi BPS, yang termasuk dalam kategori sangat akurat. Nilai eigen dominan yang diperoleh, yaitu $0{,}9988 (< 1)$, menandakan adanya tren penurunan pertumbuhan populasi perempuan dalam jangka panjang. Temuan ini menunjukkan bahwa Matriks Leslie mampu memberikan gambaran yang representatif dan cukup akurat mengenai dinamika populasi wanita di Jawa Barat, sehingga layak dijadikan acuan dalam perencanaan kebijakan kependudukan yang mempertimbangkan struktur umur.

Kata-kata kunci: Matriks Leslie, Nilai Eigen, Pertumbuhan Populasi

Diterima: 28 Juni 2025, Direvisi: 22 Juli 2025, Disetujui: 11 Agustus 2025

PENDAHULUAN

Pertumbuhan penduduk merupakan salah satu fenomena demografis yang memiliki dampak luas terhadap kehidupan sosial, ekonomi, dan kesehatan masyarakat. Berdasarkan data pada Badan Pusat Statistik (BPS), jumlah penduduk Provinsi Jawa Barat pada saat ini telah mencapai lebih dari 50 juta jiwa, menjadikannya provinsi dengan populasi terbesar di Indonesia. Dari jumlah tersebut, sekitar separuhnya adalah perempuan, yang memainkan peran sentral dalam dinamika kependudukan. Oleh karena itu, proyeksi populasi perempuan dengan pendekatan matematis yang memperhitungkan distribusi umur sangat relevan dalam mendukung perencanaan pembangunan daerah.

Salah satu model pertumbuhan populasi yang paling umum digunakan oleh para demografer adalah model Leslie, yang dikembangkan pada tahun 1940-an (Anton & Rorres, 2013). Matriks Leslie adalah sebuah matriks unik yang berbentuk matriks persegi dimana entri dari baris pertama terdiri dari tingkat kesuburan penduduk, sub diagonalnya berisi tingkat ketahanan hidup penduduk, dan entri yang lain bernilai nol (Seber, 2008).

Menurut Wijaya dan Nisfulaila (2023), laju pertumbuhan populasi dapat diestimasi dengan menghitung nilai eigen dari Matriks Leslie yang bertindak sebagai transformasi linier. Nilai eigen dominan menjadi indikator utama tren populasi: nilai di atas satu menandakan peningkatan populasi, nilai di bawah satu mengindikasikan penurunan, sedangkan nilai sama dengan satu menunjukkan kondisi stabil. Selanjutnya, estimasi jumlah populasi diproyeksikan menggunakan perhitungan model Matriks Leslie tersebut.

Berbagai penelitian sebelumnya telah menggunakan Matriks Leslie untuk menganalisis pertumbuhan populasi di berbagai wilayah, terutama di Indonesia. Marzuki dkk. (2016) meneliti pertumbuhan perempuan di Provinsi Riau dan menemukan kecenderungan peningkatan. Sanusi dkk. (2018) menerapkannya di Kota Makassar dengan hasil laju pertumbuhan yang positif. Wijaya dan Nisfulaila (2023) meneliti populasi wanita di Kabupaten Situbondo dan mendapati kecenderungan penurunan jumlah penduduk wanita. Yunita (2025) mengaplikasikan Matriks Leslie pada populasi perempuan di Kota Padang, yang juga menunjukkan tren penurunan. Maryanti dkk. (2021) menerapkan Matriks Leslie pada populasi wanita di Jawa Barat menggunakan data BPS tahun 2019 dan turut mendapati kecenderungan pertumbuhan yang belum stabil. Sementara itu, Anggreini dan Hastari (2017) menemukan bahwa populasi perempuan di Jawa Timur cenderung meningkat berdasarkan angka kelahiran dan harapan hidup.

Di tingkat internasional, Arju dkk. (2026) menerapkan model serupa untuk memproyeksikan populasi wanita Bangladesh pada tahun 2026 dan 2031, dengan nilai eigen dominan yang juga mendekati satu namun menurun dari waktu ke waktu, mengindikasikan perlambatan pertumbuhan jangka panjang. Sementara itu, kajian lain oleh Kumar dkk. (2024) mengembangkan Matriks Leslie yang bergantung pada kepadatan (*density-dependent*) untuk populasi wanita di India dalam konteks perencanaan kesehatan masyarakat, yang menunjukkan bahwa kelompok umur pasca-reproduksi tidak lagi berkontribusi terhadap pertumbuhan populasi jangka panjang. Perbandingan lintas wilayah ini menegaskan bahwa kecenderungan nilai eigen dominan bersifat spesifik konteks demografis masing-masing wilayah, sehingga kajian pada level provinsi seperti Jawa Barat tetap relevan dilakukan secara tersendiri.

Meskipun Maryanti dkk. (2021) telah menerapkan Matriks Leslie pada populasi wanita di Jawa Barat menggunakan data BPS tahun 2019, penelitian tersebut belum mempertimbangkan pembaruan struktur umur pasca 2020 serta belum divalidasi terhadap proyeksi resmi BPS terbaru. Penelitian ini memperbarui kajian tersebut dengan dua aspek pembeda utama, yaitu penggunaan data populasi dan kelahiran periode 2020–2025 yang lebih terkini, sehingga menangkap perubahan pola fertilitas dan mortalitas pasca-pandemi. Serta validasi kuantitatif hasil proyeksi terhadap proyeksi resmi BPS tahun 2030 melalui perhitungan galat persentase (*percent error*), yang belum dilakukan pada penelitian sebelumnya. Pemilihan Jawa Barat didasarkan pada fakta bahwa provinsi ini merupakan daerah dengan jumlah penduduk terbesar di Indonesia, memiliki tingkat urbanisasi yang tinggi, serta heterogenitas sosial-ekonomi antar wilayah yang signifikan. Dengan demikian, penggunaan Matriks Leslie pada konteks Jawa Barat diharapkan dapat memberikan gambaran yang lebih representatif mengenai dinamika pertumbuhan populasi perempuan di wilayah dengan kompleksitas demografis tertinggi.

Berdasarkan urgensi tersebut, penelitian ini bertujuan untuk menginvestigasi formulasi dan aplikasi model Matriks Leslie sebagai alat untuk memproyeksikan dinamika populasi wanita di Provinsi Jawa Barat menggunakan data periode pasca-pandemi. Secara spesifik, penelitian ini akan mengkaji bagaimana parameter tingkat kesuburan (fertilitas) dan tingkat ketahanan hidup (*survival rate*) dapat diintegrasikan untuk mengkonstruksikan model proyeksi yang representatif bagi struktur demografis Jawa Barat. Puncak dari analisis ini adalah untuk menghasilkan prediksi jumlah populasi wanita pada tahun 2030 dan, yang terpenting, melakukan validasi kinerja model dengan mengukur sejauh mana tingkat akurasinya jika dibandingkan dengan data proyeksi resmi dari Badan Pusat Statistik (BPS) sebagai tolak ukur. Hasil penelitian diharapkan dapat memberikan gambaran yang lebih komprehensif mengenai dinamika populasi perempuan di Jawa Barat serta menjadi referensi bagi perencanaan kebijakan kependudukan di tingkat provinsi.

METODE PENELITIAN

Penelitian terapan ini memanfaatkan model Matriks Leslie untuk mengestimasi laju pertumbuhan dan jumlah penduduk di Jawa Barat. Dengan menggunakan data sekunder berupa jumlah penduduk perempuan per kelompok umur dan *Age Specific Fertility Rate* (ASFR) dari BPS, penelitian ini bertujuan mengidentifikasi tren populasi (naik, stabil, atau turun). Alur penelitian dimulai dari perumusan masalah dan penelusuran literatur, dilanjutkan dengan pengumpulan data sekunder periode 2020–2025 dari Badan Pusat Statistik.

Periode 2020–2025 dipilih karena rentang lima tahun tersebut sesuai dengan lebar setiap kelas umur (5 tahun) yang digunakan dalam Matriks Leslie, sehingga transisi individu dari satu kelompok umur ke kelompok umur berikutnya dapat diamati secara konsisten antar-periode. Data jumlah perempuan tahun 2020 digunakan sebagai penyebut pada perhitungan tingkat kesuburan (a_i), sedangkan pasangan data tahun 2020 dan 2025 digunakan untuk menghitung tingkat ketahanan hidup (b_i) melalui rasio populasi antar-periode. Data populasi tahun 2025 selanjutnya digunakan sebagai vektor populasi awal ($x^{(0)}$) untuk memproyeksikan populasi tahun 2030. Data tersebut selanjutnya dikonversi menjadi parameter tingkat kesuburan dan ketahanan hidup sebagai input model.

Matriks Leslie

Setelah mengolah data demografi yang diperoleh dari BPS dan memperoleh tingkat kesuburan serta tingkat ketahanan hidup dari tiap kelompok umur, kedua parameter ini akan digunakan untuk membentuk Matriks Leslie, yaitu matriks persegi yang menggambarkan hubungan antara struktur umur penduduk dengan perubahan jumlah populasi dari waktu ke waktu. Matriks Leslie terdiri atas dua bagian utama, yaitu baris pertama yang berisi tingkat kesuburan dan sub-diagonal yang berisi tingkat ketahanan hidup, sedangkan elemen lainnya bernilai nol. Secara umum, bentuk Matriks Leslie dinyatakan sebagai berikut:

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

dengan a_i menyatakan tingkat kesuburan wanita pada kelas umur ke-i, b_i menyatakan tingkat ketahanan hidup dari kelas umur i ke $(i + t)$, dan n menyatakan jumlah kelas umur.

Vektor Populasi

Model Matriks Leslie menggambarkan hubungan matematis antara struktur umur populasi dan dinamika pertumbuhannya dari waktu ke waktu. Untuk merepresentasikan populasi tersebut, digunakan vektor populasi, yaitu vektor kolom yang berisi jumlah individu dalam setiap kelompok umur pada waktu t. Populasi pada waktu ke-t direpresentasikan sebagai berikut:

$$x^{(t)} = \begin{bmatrix} x_1^{(t)} \\ x_2^{(t)} \\ \vdots \\ x_n^{(t)} \end{bmatrix}$$

dengan $x_i^{(t)}$ menyatakan jumlah individu pada kelompok umur ke-i pada waktu t.

Estimasi Jumlah Kelahiran Bayi Perempuan

Data dari BPS tidak menyediakan jumlah kelahiran bayi perempuan secara spesifik untuk setiap kelompok umur ibu. Oleh karena itu, jumlah anak perempuan yang lahir dari wanita pada kelas umur ke-i (A_i) diestimasi menggunakan pendekatan *Age Specific Fertility Rate* (ASFR). Perhitungan ini melibatkan rasio jenis kelamin saat lahir, interval waktu proyeksi, dan tingkat ketahanan hidup bayi, yang dirumuskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A_i = \frac{ASFR_i \times x_i^{(t)} \times R_p \times \Delta t \times b_1}{1000}} \quad (1)$$

dengan $ASFR_i$ menyatakan tingkat fertilitas spesifik kelas umur ke-i per 1.000 wanita, $x_i^{(t)}$ menyatakan populasi wanita kelas umur ke-i pada waktu t, R_p menyatakan proporsi kelahiran bayi perempuan terhadap total kelahiran, Δt adalah interval waktu antar periode (diasumsikan jumlah kelahiran bersifat konstan setiap tahunnya), dan b_1 adalah tingkat ketahanan hidup bayi dari usia 0 hingga 5 tahun.

Nilai Tingkat Kesuburan Wanita (a_i) dan Tingkat Ketahanan Hidup (b_i)

Nilai tingkat kesuburan wanita (a_i) diperoleh melalui persamaan berikut:

$$\boldsymbol{a_i = \frac{A_i}{x_i^{(t)}}} \quad (2)$$

dengan A_i menyatakan jumlah bayi (wanita) pada kelas umur ke-i waktu t hingga waktu $t+1$ dan $x_i^{(t)}$ menyatakan populasi wanita pada kelas umur ke-i di waktu t. Sedangkan untuk nilai tingkat ketahanan hidup wanita (b_i) diperoleh melalui persamaan berikut:

$$\boldsymbol{b_i = \frac{x_{i+1}^{(t+1)}}{x_i^{(t)}}} \quad (3)$$

dengan $x_{i+1}^{(t+1)}$ menyatakan populasi wanita kelas umur ke-$i+1$ di waktu $t+1$ dan $x_i^{(t)}$ menyatakan populasi wanita pada kelas umur ke-i pada waktu t.

Model Pertumbuhan Populasi Leslie

Perubahan jumlah populasi dari tahun ke tahun dinyatakan dalam model pertumbuhan populasi Leslie sebagai:

$$\boldsymbol{x^{(t+1)} = L \cdot x^{(t)}} \quad (4)$$

sedangkan model pertumbuhan populasi untuk p tahun ke depan ditulis:

$$\boldsymbol{x^{(t+p)} = L^p \cdot x^{(t)}} \quad (5)$$

dengan $x^{(t)}$ menyatakan vektor populasi wanita pada waktu t.

Nilai Eigen

Untuk menganalisis perilaku jangka panjang populasi, digunakan konsep nilai eigen dan vektor eigen dari matriks L. Menurut Anton dan Rorres (2013), jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka vektor tak nol pada dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yaitu:

$$\boldsymbol{Ax = \lambda x} \tag{6}$$

untuk sembarang skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari A dan dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Nilai eigen dapat diperoleh dari persamaan karakteristik:

$$\boldsymbol{\det(\lambda I - A) = 0} \tag{7}$$

yang akan memberikan sejumlah $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$.

Analisis Laju Pertumbuhan Populasi Berdasarkan Nilai Eigen Dominan (λ_1)

Nilai-nilai eigen yang diperoleh selanjutnya digunakan untuk menentukan nilai eigen dominan (λ_1), yaitu nilai eigen yang paling besar secara absolut. Secara matematis dapat dituliskan sebagai:

$$|\boldsymbol{\lambda_1}| > |\boldsymbol{\lambda_i}| \text{ dengan } \boldsymbol{i = 2, 3, \ldots, n.} \tag{8}$$

Interpretasi karakteristik nilai eigen dominan terhadap laju pertumbuhan populasi disajikan secara skematis pada Tabel 1 sebagai berikut.

Tabel 1. Interpretasi Nilai Eigen Dominan Matriks Leslie terhadap Laju Pertumbuhan Populasi

Nilai Eigen Dominan (λ_1)	Interpretasi Terhadap Laju Pertumbuhan Populasi
$\lambda_1 < 1$	Populasi menurun
$\lambda_1 > 1$	Populasi meningkat
$\lambda_1 = 1$	Populasi stabil

Sementara itu, estimasi populasinya diperoleh melalui perhitungan menggunakan model pertumbuhan populasi Matriks Leslie.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Data empiris yang menjadi landasan penelitian ini ditampilkan pada Tabel 2. Data tersebut mencakup statistik populasi perempuan dan angka ASFR di Provinsi Jawa Barat selama periode pengamatan tahun 2020 dan 2025.

Tabel 2. Data Jumlah Populasi Wanita Tahun 2020 dan 2025, serta ASFR Tahun 2020

Kelas Umur	Interval Umur	Jumlah Perempuan Tahun 2020	ASFR Tahun 2020	Jumlah Perempuan Tahun 2025
1	0-4	1.910.514	0	1.951.060
2	5-9	1.882.904	0	1.899.264
3	10-14	1.954.415	0	1.875.601
4	15-19	1.975.844	24,5	1.943.850
5	20-24	2.005.005	94,3	1.949.318
6	25-29	1.985.416	125,4	1.974.826
7	30-34	1.962.811	98,2	1.968.099
8	35-39	1.880.004	58,7	1.945.793
9	40-44	1.800.551	18,2	1.860.395
10	45-49	1.619.243	2,5	1.776.800
11	50-54	1.395.453	0	1.590.225

12	55-59	1.148.008	0	1.359.134
13	60-64	869.440	0	1.101.064
14	65-69	627.519	0	810.403
15	70-74	382.733	0	553.643
16	> 75	365.417	0	517.411

Sumber: BPS

Berdasarkan Tabel 2, populasi awal perempuan di Provinsi Jawa Barat pada kelas umur 1 di tahun 2025 tercatat sebanyak 1.951.060 jiwa. Data tersebut mencakup angka *Age Specific Fertility Rate* (ASFR) tahun 2020 yang merepresentasikan tingkat kesuburan spesifik per kelompok umur ibu. Nilai ASFR ini selanjutnya akan digunakan sebagai basis matematis untuk mengestimasi jumlah kelahiran bayi perempuan (A_i) selama interval proyeksi 2020-2025. Sementara itu, data jumlah perempuan pada tahun 2020 dan 2025 digunakan untuk menghitung tingkat ketahanan hidup (b_i) yang merepresentasikan probabilitas kelangsungan hidup penduduk perempuan dari satu kelompok umur ke kelompok umur berikutnya.

Analisis estimasi laju pertumbuhan dan jumlah populasi wanita di Jawa Barat dilakukan dengan tahapan:

1. Menyajikan model pertumbuhan Matriks Leslie untuk p tahun berikutnya

Pada tahap awal, populasi wanita tahun 2025 ditetapkan sebagai vektor populasi awal ($t = 0$). Dikarenakan proyeksi dilakukan untuk tahun target 2030, maka selisih waktu atau langkah proyeksi didefinisikan sebesar $p = 5$. Dengan terdapat total 16 kelas umur pada Tabel 2, maka Matriks Leslie (L) berukuran 16×16. Sehingga diperoleh model pertumbuhan populasi wanita di Provinsi Jawa Barat tahun 2030 dengan menggunakan Persamaan (5), yaitu:

$$x^{(t+p)} = L^p \cdot x^{(t)}$$

$$x^{(0+5)} = L^5 \cdot x^{(0)}$$

$$\boldsymbol{x^{(5)} = L^5 \cdot x^{(0)}} \quad (9)$$

dengan:

$x^{(5)}$: vektor hasil estimasi populasi untuk periode 5 tahun setelahnya, yakni tahun 2030 ($t = 5$),

L : Matriks Leslie berukuran 16×16,

$x^{(0)}$: vektor populasi wanita menurut kelompok umur pada tahun 2025 (t = 0).

2. Menentukan vektor distribusi umur awal

Vektor distribusi umur awal yang dinotasikan dengan $x^{(0)}$ merupakan vektor kolom yang entri-entrinya adalah jumlah populasi wanita di Provinsi Jawa Barat tahun 2025 untuk masing-masing kelas umur, yaitu:

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1.951.060} \\ \mathbf{1.899.264} \\ \mathbf{1.875.601} \\ \mathbf{1.943.850} \\ \mathbf{1.949.318} \\ \mathbf{1.974.826} \\ \mathbf{1.968.099} \\ \mathbf{1.945.793} \\ \mathbf{1.860.395} \\ \mathbf{1.776.800} \\ \mathbf{1.590.225} \\ \mathbf{1.359.134} \\ \mathbf{1.101.064} \\ \mathbf{810.403} \\ \mathbf{553.643} \\ \mathbf{517.411} \end{bmatrix} \quad (10)$$

3. Menghitung jumlah bayi perempuan yang lahir (A_i)

Data *Age Specific Fertility Rate* (ASFR) dari BPS merepresentasikan tingkat kelahiran bayi per 1.000 wanita. Untuk mengestimasi jumlah kelahiran khusus bayi perempuan, nilai ASFR dikalikan dengan proporsi kelahiran perempuan (R_p). Dengan rasio jenis kelamin adalah 102 laki-laki untuk setiap 100 perempuan, diperoleh proporsi sebesar $R_p = \frac{100}{102+100} = 0{,}495$. Selanjutnya, digunakan parameter ketahanan hidup yang diwakili oleh nilai b_1 yang dihitung dari rasio perpindahan kelas umur, yaitu $b_1 = \frac{x_2^{(t+1)}}{x_1^{(t)}} = \frac{1.899.264}{1.910.514} = 0{,}99411$. Pengali b_1 ini dimasukkan untuk mengakomodasi fakta demografis bahwa tidak semua bayi yang baru lahir akan selamat dan tercatat sebagai penduduk pada kelompok umur pertama (0-4 tahun) di akhir periode proyeksi untuk interval waktu $\Delta t = 5$ tahun.

Sebagai contoh perhitungan, dengan menggunakan Persamaan (1), estimasi kelahiran pada kelompok umur ke-4 (15-19 tahun) adalah:

$$A_4 = \frac{24{,}5 \times 1.975.844 \times 0{,}495 \times 5 \times 0{,}99411}{1000} \approx 118.922$$

Dengan prosedur komputasi yang sama untuk seluruh kelompok umur, diperoleh hasil yang disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Data Jumlah Kelahiran Bayi Perempuan di Provinsi Jawa Barat Tahun 2020-2025

Kelas Umur	Interval Umur	Jumlah Anak Perempuan yang Lahir Tahun 2020-2025
1	0-4	0
2	5-9	0
3	10-14	0
4	15-19	118.922
5	20-24	465.145
6	25-29	612.441
7	30-34	474.338
8	35-39	271.504
9	40-44	80.681
10	45-49	9.881
11	50-54	0

12	55-59	0
13	60-64	0
14	65-69	0
15	70-74	0
16	> 75	0

Nilai-nilai A_i ini selanjutnya akan disubstitusikan ke dalam Persamaan (2) untuk mendapatkan tingkat kesuburan wanita (a_i).

4. Menghitung nilai tingkat kesuburan wanita (a_i) dan tingkat ketahanan hidup (b_i)

Perhitungan nilai tingkat kesuburan wanita (a_i) dilakukan dengan membagi jumlah kelahiran bayi perempuan (A_i) dengan populasi awal wanita pada kelas umur ke-i tahun 2020. Sebagai contoh pada kelompok umur ke-5 (20-24 tahun):

$$a_5 = \frac{A_5}{x_5^{(t)}} = \frac{465.145}{2.005.005} \approx 0{,}23199$$

Di sisi lain, parameter tingkat ketahanan hidup wanita (b_i) dihitung menggunakan Persamaan (3). Perhitungan untuk kelompok umur ke-i didasarkan pada rasio kelangsungan hidup, yakni dengan membandingkan populasi wanita kelas umur ke $(i+1)$ pada periode waktu berikutnya (tahun 2025) terhadap populasi wanita kelas umur ke-i pada periode awal (tahun 2020). Sebagai contoh untuk kelompok umur ke-1:

$$b_1 = \frac{x_2^{(t+1)}}{x_1^{(t)}} = \frac{1.899.264}{1.910.514} = 0{,}99411$$

Perlu dicatat bahwa nilai b_{15} (kelompok umur 70-74 menuju > 75) menghasilkan rasio sebesar 1,35188, yang secara konseptual tidak mungkin terjadi karena tingkat ketahanan hidup semestinya bernilai antara 0 dan 1. Nilai ini muncul karena kelompok umur ke-16 (> 75 tahun) merupakan kelas umur terbuka (*open-ended interval*) yang mengakumulasi seluruh individu berusia 75 tahun ke atas, sehingga jumlahnya pada tahun 2025 tidak hanya berasal dari kelompok umur 70–74 pada tahun 2020, melainkan juga dari individu yang sudah berada pada kelompok > 75 pada tahun 2020 dan tetap bertahan hidup, ditambah kemungkinan pengaruh migrasi neto dan revisi basis data BPS antar periode. Oleh karena itu, nilai b_{15} pada penelitian ini dibulatkan menjadi 1 (mengasumsikan seluruh individu kelompok umur ke-15 bertahan hidup).

Dengan demikian, diperoleh nilai tingkat kesuburan wanita (a_i) dan nilai tingkat ketahanan hidup wanita (b_i) seluruh kelas umur populasi wanita di Provinsi Jawa Barat pada Tabel 4 berikut.

Tabel 4. Data Nilai Tingkat Kesuburan Wanita (a_i) dan Tingkat Ketahanan Hidup Wanita (b_i) di Provinsi Jawa Barat

Kelas Umur	Interval Umur	Tingkat Kesuburan (a_i)	Tingkat Ketahanan Hidup (b_i)
1	0-4	0	0,99411
2	5-9	0	0,99612
3	10-14	0	0,99459
4	15-19	0,06019	0,98657
5	20-24	0,23199	0,98495
6	25-29	0,30847	0,99128
7	30-34	0,24166	0,99133
8	35-39	0,14442	0,98957
9	40-44	0,04481	0,98681
10	45-49	0,00610	0,98208

11	50-54	0	0,97397
12	55-59	0	0,95911
13	60-64	0	0,93210
14	65-69	0	0,88227
15	70-74	0	1
16	> 75	0	-

Nilai pada Tabel 4 menunjukkan parameter tingkat kesuburan (a_i) yang diperoleh dari rasio kelahiran terhadap populasi perempuan di tiap kelas umur, serta parameter tingkat ketahanan hidup (b_i) yang dihitung dari perbandingan populasi antar periode. Perlu diperhatikan bahwa tingkat ketahanan hidup pada kelas umur ke-16 (b_{16}) tidak terdefinisi dan hanya ditandai dengan strip (-). Hal ini dikarenakan interval >75 tahun merupakan kelompok umur terakhir atau batas akhir dari struktur pemodelan, sehingga tidak ada lagi probabilitas transisi kelangsungan hidup menuju kelompok umur ke-17. Parameter-parameter ini menjadi entri utama dalam pembentukan Matriks Leslie berukuran 16×16 untuk memproyeksikan populasi tahun 2030.

5. Mengonstruksi Matriks Leslie dan menghitung estimasi populasi wanita di Provinsi Jawa Barat Tahun 2030

Matriks Leslie L berukuran 16×16 dikonstruksi dengan menyubstitusikan nilai a_i secara berurutan pada seluruh entri baris pertama (kolom 1 hingga 16). Posisi ini merepresentasikan kontribusi kelahiran bayi perempuan dari setiap kelompok umur ibu terhadap kelompok umur pertama (0-4 tahun) pada periode berikutnya. Selanjutnya, nilai b_i ditempatkan pada sub-diagonal utama, yaitu pada baris ke-$(i+1)$ kolom ke-i, yang merepresentasikan proporsi individu kelompok umur ke-i yang bertahan hidup dan bertransisi ke kelompok umur ke-$(i+1)$. Seluruh entri lain pada matriks bernilai nol karena tidak ada mekanisme demografis langsung yang menghubungkan kelompok-kelompok umur tersebut. Struktur ini memastikan bahwa perkalian matriks L dengan vektor populasi $x^{(t)}$ akan menghasilkan vektor populasi pada periode berikutnya yang mencerminkan proses kelahiran dan penuaan (*aging*) secara simultan. Secara eksplisit, bentuk matriks Leslie L yang dikonstruksi adalah sebagai berikut:

$$L = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0{,}06019 & 0{,}23199 & 0{,}30847 & 0{,}24166 & 0{,}14442 & 0{,}04481 & 0{,}00610 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}99411 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}99612 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0{,}99459 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}98657 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}98495 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}99128 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}99133 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}98957 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}98681 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}98208 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}97397 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}95911 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}93210 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}88227 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

Estimasi populasi menggunakan matriks Leslie diperoleh dengan menggunakan Persamaan (9) yaitu sebagai berikut:

$$x^{(5)} = L^5 \cdot x^{(0)}$$

Sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{x^{(5)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1.921.649} \\ \mathbf{1.916.776} \\ \mathbf{1.942.067} \\ \mathbf{1.971.524} \\ \mathbf{1.971.731} \\ \mathbf{1.867.252} \\ \mathbf{1.812.506} \\ \mathbf{1.781.317} \\ \mathbf{1.836.817} \\ \mathbf{1.842.423} \\ \mathbf{1.861.103} \\ \mathbf{1.822.375} \\ \mathbf{1.743.161} \\ \mathbf{1.569.864} \\ \mathbf{1.340.490} \\ \mathbf{1.221.621} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Vektor populasi $x^{(5)}$ dapat dituliskan kembali dalam bentuk tabel seperti pada Tabel 5 berikut.

Tabel 5. Hasil Estimasi Populasi Wanita Provinsi Jawa Barat Tahun 2030

Interval Umur	Estimasi Populasi Wanita Tahun 2030	Interval Umur	Estimasi Populasi Wanita Tahun 2030
0-4	1.921.649	40-44	1.836.817
5-9	1.916.776	45-49	1.842.423
10-14	1.942.067	50-54	1.861.103
15-19	1.971.524	55-59	1.822.375
20-24	1.971.731	60-64	1.743.161
25-29	1.867.252	65-69	1.569.864
30-34	1.812.506	70-74	1.340.490
35-39	1.781.317	>75	1.221.621

Berdasarkan hasil perhitungan pada Tabel 5, diperoleh total estimasi populasi perempuan di Provinsi Jawa Barat pada tahun 2030 adalah sebanyak 28.422.685 jiwa, dengan puncaknya ada pada interval umur 20-24 tahun sebanyak 1.971.731 jiwa.

Hasil proyeksi pada Tabel 5 menunjukkan bahwa struktur umur populasi wanita Jawa Barat pada tahun 2030 mengalami pergeseran menuju populasi yang relatif lebih tua dibandingkan tahun 2025. Proporsi penduduk pada kelompok umur produktif (15-64 tahun) tetap mendominasi, namun pertumbuhan pada kelompok umur lanjut usia (65 tahun ke atas) meningkat lebih cepat secara relatif dibandingkan kelompok umur muda (0-14 tahun), yang mengindikasikan mulainya proses penuaan populasi (*population ageing*). Implikasinya, beban ketergantungan (*dependency ratio*) berpotensi meningkat dalam jangka menengah, sehingga perencanaan kebijakan perlu mengantisipasi kebutuhan layanan kesehatan lanjut usia, jaminan sosial, serta penyesuaian struktur tenaga kerja perempuan. Di sisi lain, penurunan proporsi kelompok umur balita (0-4 tahun) relatif terhadap total populasi juga konsisten dengan tren penurunan tingkat kesuburan yang tercermin pada nilai a_i di kelompok umur reproduktif (Tabel 4), dan perlu menjadi perhatian dalam perencanaan layanan kesehatan ibu dan anak jangka panjang.

6. Analisis laju pertumbuhan populasi berdasarkan nilai eigen dominan

Selanjutnya, akan dihitung laju pertumbuhan penduduk menggunakan nilai eigen seperti pada Persamaan (7). Berdasarkan perhitungan menggunakan Python, diperoleh 16 nilai eigen dari matriks Leslie, dengan nilai eigen dominan (terbesar secara absolut) adalah $\lambda_1 = 0{,}9988$. Karena nilai eigen

dominan yang diperoleh lebih kecil dari satu ($\lambda_1 < 1$), maka berdasarkan Tabel 1, nilai ini menunjukkan bahwa populasi wanita di Jawa Barat berada pada tren pertumbuhan negatif dalam jangka panjang, dengan laju penyusutan tahunan asimtotik sebesar sekitar $(1 - 0{,}9988) \times 100\% = 0{,}11\%$ per tahun apabila pola tingkat kesuburan dan tingkat ketahanan hidup saat ini bertahan konstan. Nilai λ_1 yang sangat mendekati satu (bukan jauh di bawahnya) juga mengindikasikan bahwa penurunan ini berlangsung lambat (gradual), bukan penurunan tajam, sehingga populasi wanita Jawa Barat secara praktis masih relatif stabil dalam horizon proyeksi jangka pendek hingga menengah (5-10 tahun ke depan). Dan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1 pada dasarnya merepresentasikan distribusi umur stabil (*stable age distribution*) yang akan dicapai populasi dalam jangka panjang apabila parameter a_i dan b_i tidak berubah. Semakin dekat struktur umur aktual dengan vektor eigen tersebut, semakin valid pula asumsi proyeksi jangka panjang menggunakan nilai eigen dominan.

Dikarenakan hanya ada satu hasil estimasi dengan satu nilai referensi resmi dari proyeksi BPS, maka tingkat akurasi model diukur menggunakan *Absolute Percentage Error* (APE), yang dihitung sebagai:

$$\boldsymbol{APE} = \left|\frac{\boldsymbol{Estimated\ Value - True\ Value}}{\boldsymbol{True\ Value}}\right| \times \mathbf{100\%} \qquad (12)$$

Data populasi wanita tahun 2030 berdasarkan pemodelan adalah 28.422.685 jiwa, sedangkan menurut proyeksi BPS adalah 26.910.000 jiwa, maka

$$\begin{aligned}\boldsymbol{APE} &= \left|\frac{\boldsymbol{Estimated\ Value - True\ Value}}{\boldsymbol{True\ Value}}\right| \times \mathbf{100\%} \\ &= \left|\frac{\mathbf{28.422.685 - 26.910.000}}{\mathbf{26.910.000}}\right| \\ &\times \mathbf{100\%} = \mathbf{5{,}62\%}\end{aligned}$$

diperoleh error sebesar 5,62%. Mengingat validasi ini hanya membandingkan hasil estimasi pada satu titik waktu proyeksi (yakni tahun 2030, $n = 1$), maka nilai APE yang diperoleh secara matematis ekuivalen dengan nilai rata-ratanya, yaitu *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE). Menurut Lewis (1982), nilai *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) kurang dari 10% dikategorikan sebagai *highly accurate forecasting*, sedangkan nilai antara 10-20% masih dianggap *good forecasting*. Berdasarkan kriteria MAPE, hasil estimasi Matriks Leslie dalam penelitian ini dapat dikatakan sangat akurat.

Namun, meskipun galat sebesar 5,62% tergolong dalam kategori sangat akurat menurut kriteria MAPE (Lewis, 1982), beberapa keterbatasan pendekatan perlu digarisbawahi agar hasil tidak dimaknai berlebihan. Pertama, Matriks Leslie dalam penelitian ini mengasumsikan populasi tertutup, yaitu tidak memperhitungkan migrasi masuk maupun keluar, padahal Jawa Barat merupakan wilayah dengan mobilitas penduduk yang tinggi, khususnya di kawasan perkotaan seperti Bandung dan Bekasi. Kedua, model mengasumsikan nilai a_i dan b_i konstan sepanjang periode proyeksi (2025-2030), sementara pada kenyataannya tingkat kesuburan dan mortalitas dapat berubah akibat faktor kebijakan kesehatan, sosial-ekonomi, maupun kejadian tak terduga. Ketiga, perbandingan hanya dilakukan pada satu titik waktu (tahun 2030), sehingga validasi ini belum menggambarkan akurasi model pada horizon proyeksi yang lebih panjang, dan idealnya divalidasi kembali pada beberapa titik waktu berikutnya begitu data BPS terbaru tersedia. Keterbatasan-keterbatasan ini menunjukkan bahwa hasil model sebaiknya digunakan sebagai referensi pendukung, bukan sebagai satu-satunya dasar pengambilan kebijakan kependudukan.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil analisis menggunakan model Matriks Leslie, diperoleh estimasi jumlah populasi wanita di Provinsi Jawa Barat pada tahun 2030 sebesar 28.422.685 jiwa. Sementara itu, proyeksi resmi dari BPS untuk tahun yang sama adalah 26.910.000 jiwa, sehingga diperoleh tingkat error sebesar

5,62%, yang termasuk dalam kategori sangat akurat. Hal ini menunjukkan bahwa model Matriks Leslie cukup representatif untuk menggambarkan dinamika pertumbuhan populasi di wilayah ini.

Nilai eigen dominan yang diperoleh adalah $\lambda_1 = 0{,}9988$, yang bernilai kurang dari satu. Hal ini mengindikasikan bahwa laju pertumbuhan populasi wanita di Jawa Barat cenderung menurun, sehingga dalam jangka panjang populasi wanita diprediksi tidak mengalami peningkatan signifikan. Tren ini sejalan dengan pola tingkat kesuburan yang menurun pada kelompok umur reproduktif serta tingkat ketahanan hidup yang relatif stabil pada kelompok umur lanjut.

Secara keseluruhan, penelitian ini menunjukkan bahwa Matriks Leslie dapat digunakan secara efektif untuk memproyeksikan struktur umur dan laju pertumbuhan penduduk perempuan di Jawa Barat. Model ini juga terbukti memberikan hasil yang cukup dekat dengan proyeksi BPS. Dengan demikian, model ini dapat menjadi referensi tambahan bagi pemerintah daerah, terutama dalam perencanaan kebijakan kependudukan, kesehatan ibu-anak, dan strategi pembangunan jangka panjang yang berbasis struktur umur penduduk.

Sebagai saran, mengingat asumsi populasi tertutup dan parameter konstan yang digunakan dalam studi ini, penelitian selanjutnya disarankan untuk mempertimbangkan integrasi faktor mobilitas penduduk (migrasi masuk dan keluar) serta penggunaan probabilitas transisi yang dinamis (*time-varying parameters*). Pengembangan melalui model Leslie yang diperluas ini diharapkan dapat menghasilkan proyeksi yang lebih akurat dan mencerminkan dinamika demografis yang lebih kompleks.

REFERENSI

Anggreini, D & Hastari, R.C. 2017, 'Penerapan matriks Leslie pada angka kelahiran dan harapan hidup wanita di Provinsi Jawa Timur', *Pythagoras: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, vol. 12, no. 2, pp. 109–122.

Anton, H & Rorres, C. 2013, *Elementary linear algebra: applications version*, 11th edn, John Wiley & Sons, Hoboken.

Arju, A. dkk. (2026). Age-specific Female Population Projection of Bangladesh in 2026 and 2031 Using Leslie Matrix Model. *International Journal of Quantitative Research and Modeling*, vol. 7, no. 1, pp. 63–74.

Badan Pusat Statistik 2014, *Proyeksi penduduk menurut provinsi 2010–2035*, Badan Pusat Statistik, Jakarta. Diakses 6 Oktober 2025, dari https://www.bps.go.id/id/statistics-table/1/MTI3NCMx/proyeksi-penduduk-menurut-provinsi--2010---2035.html.

Badan Pusat Statistik 2020, *Provinsi Jawa Barat dalam angka 2020*, Badan Pusat Statistik Provinsi Jawa Barat, Bandung. Diakses 6 Oktober 2025, dari https://jabar.bps.go.id/id/publication/2020/04/27/cfab9a400cf304f800182a5f/provinsi-jawa-barat-dalam-angka-2020.html.

Badan Pusat Statistik 2021, *Angka kelahiran menurut kelompok umur ibu (Age spesific fertility rate/ASFR) menurut provinsi 1971-2020*, Badan Pusat Statistik, Jakarta. Diakses 6 Oktober 2025, dari https://www.bps.go.id/id/statistics-table/1/MjIxNCMx/angka-kelahiran-menurut-kelompok-umur-ibu--age-spesific-fertility-rate-asfr--menurut-provinsi-1971-2020.html.

Badan Pusat Statistik 2025, *Provinsi Jawa Barat dalam angka 2025*, Badan Pusat Statistik Provinsi Jawa Barat, Bandung. Diakses 6 Oktober 2025, dari https://jabar.bps.go.id/id/publication/2025/02/28/d906b36c4b300ab77908dfe2/provinsi-jawa-barat-dalam-angka-2025.html.

Kumar, V., Jain, V., Tomar, G., Chauhan, N.S., Chandra, V. and Lal, S., 2024. Application of leslie matrix model in human population dynamics and public health. *South East. Eur. J. Public Health*, pp.444-459.

Lewis, C.D. 1982, *Industrial and Business Forecasting Methods*, Butterworths, London.

Maryanti, A., Supian, S. & Subiyanto, S. 2021. 'Application of Leslie Matrix to Predict the Number and Growth Rate of Women in West Java 2021', *International Journal and Quantitative Research and Modeling*, vol. 2, no. 1, pp. 11–23.

Marzuki, C.C., Muda, Y. & Hasanah, N. 2016, 'Aplikasi matriks Leslie untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan perempuan di Provinsi Riau pada tahun 2017', *Journal of Sains Matematika dan Statistika*, vol. 2, no. 1, pp. 37–48.

Sanusi, W., Sukarna & Ridiawati, N. 2018, 'Matriks Leslie dan aplikasinya dalam memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan penduduk di Kota Makassar', *Jurnal MATHCOS*, vol. 4, no. 1, pp. 45–56.

Seber, G.A.F. 2008, *A matrix handbook for statisticians*, Wiley, Hoboken.

Wijaya, U.I. & Nisfulaila, I. 2023, 'Analisis implementasi matriks dalam estimasi laju pertumbuhan populasi wanita', *Jurnal Riset Mahasiswa Matematika*, vol. 3, no. 2, pp. 101–109.

Yunita, R., Rahayu, B. & Mashuri 2025, 'Application of Leslie matrix in the calculation of female population prediction in Padang City, Indonesia', *Journal of Applied Mathematics and Mathematics (JAMM)*, vol. 1, no. 1, pp. 25–34.