

Perbandingan Metode Monte Carlo Standar, *Control Variate*, dan *Antithetic Variate* pada Estimasi Harga dan Interval Kepercayaan Opsi Asia Rataan Aritmatika

Muhamad Rashif Hilmi*

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta

Email: rashif.hilmi@uin-suka.ac.id

Abstract

The pricing of arithmetic average Asian options is commonly performed using Monte Carlo simulation because no closed-form analytical solution is available. However, the standard Monte Carlo method suffers from high estimator variance, requiring a large number of simulations to achieve accurate estimates. This study compares the performance of the Standard Monte Carlo, Control Variate, and Antithetic Variate methods in estimating option prices and confidence intervals for arithmetic average Asian call and put options. Numerical simulations were conducted under the Geometric Brownian Motion model using identical parameters for all methods so that differences in the results were solely attributable to the estimation techniques. The number of simulations was varied to investigate convergence behavior and the corresponding 95% confidence intervals. The results indicate that all methods converge as the number of simulations increases, while the confidence intervals become progressively narrower. The Antithetic Variate method provides more stable estimates than the Standard Monte Carlo method by reducing estimator variance through negatively correlated random pairs. Among the three methods, the Control Variate method consistently produces the most stable estimates and the narrowest confidence intervals for both call and put options. These findings demonstrate that the Control Variate method is the most efficient and accurate approach for pricing arithmetic average Asian options.

Keywords: antithetic variate, control variate, confidence interval, Monte Carlo, asian option.

Abstrak

Penentuan harga Opsi Asia rata-rata aritmatika umumnya dilakukan menggunakan metode simulasi Monte Carlo karena tidak tersedia solusi analitik *closed-form*. Namun, metode Monte Carlo standar memiliki kelemahan berupa variansi estimator yang relatif besar, sehingga memerlukan jumlah simulasi yang banyak untuk menghasilkan estimasi yang presisi. Penelitian ini bertujuan membandingkan kinerja metode Monte Carlo Standar, Monte Carlo *Control Variate*, dan Monte Carlo *Antithetic Variate* dalam mengestimasi harga serta interval kepercayaan Opsi Asia rata-rata aritmatika untuk opsi beli dan opsi jual. Penelitian dilakukan melalui simulasi numerik menggunakan model *Geometric Brownian Motion* dengan parameter yang sama pada ketiga metode sehingga perbedaan hasil hanya dipengaruhi oleh karakteristik masing-masing metode. Jumlah simulasi divariasikan untuk mengamati proses konvergensi estimasi dan perubahan interval kepercayaan 95%. Hasil penelitian menunjukkan bahwa seluruh metode menghasilkan estimasi harga yang semakin konvergen dan interval kepercayaan yang semakin sempit seiring bertambahnya jumlah simulasi. Metode *Antithetic Variate* menghasilkan estimasi yang lebih stabil dibandingkan Monte Carlo Standar melalui pengurangan variansi menggunakan pasangan bilangan acak antitetik. Sementara itu, metode *Control Variate* memberikan estimasi yang paling stabil dengan interval kepercayaan yang paling sempit pada opsi beli maupun opsi jual. Hasil penelitian menunjukkan bahwa

metode *Control Variate* merupakan metode yang paling efisien dan presisi dalam mengestimasi harga Opsi Asia rata-rata aritmatika.

Kata-kata kunci: *antithetic variate*, *control variate*, interval kepercayaan, Monte Carlo, opsi asia.

PENDAHULUAN

Opsi merupakan salah satu instrumen derivatif yang banyak digunakan dalam manajemen risiko investasi. Melalui kontrak opsi, investor memperoleh hak untuk membeli (opsi beli) atau menjual (opsi jual) suatu aset pada harga yang telah ditentukan sebelumnya, sehingga dapat melindungi nilai investasi dari fluktuasi harga aset (Mooy dkk, 2017; Hull, 2022). Salah satu jenis opsi eksotik yang banyak digunakan adalah Opsi Asia, yaitu opsi yang nilai *payoff*-nya bergantung pada rata-rata harga aset selama periode tertentu, sehingga mampu mengurangi pengaruh fluktuasi harga yang ekstrem dibandingkan opsi Eropa biasa (Pramuditya, 2017).

Opsi Asia merupakan opsi yang nilai keuntungannya bergantung pada rata-rata harga aset selama periode kontrak, sehingga lebih mampu meredam pengaruh fluktuasi harga yang ekstrem dibandingkan opsi Eropa biasa (Kamila dan Andriyati, 2023). Menurut Hilmi, Nurtiyasari dan Syahputra (2022) penggunaan rata-rata harga aset menjadikan Opsi Asia lebih stabil dalam mengurangi risiko manipulasi harga pada saat jatuh tempo. Penelitian oleh Zubedi dkk. (2022) juga menunjukkan bahwa Opsi Asia menjadi salah satu instrumen derivatif yang banyak dikaji karena mampu menghasilkan estimasi harga yang lebih representatif pada kondisi pasar yang berfluktuasi.

Penentuan harga opsi Asia menjadi tantangan tersendiri karena tidak memiliki solusi analitik yang *closed form*, terutama dengan rata-rata aritmatika dari harga aset. Oleh karena itu, metode numerik seperti Monte Carlo menjadi pendekatan utama dalam estimasi harga opsi ini. Simulasi Monte Carlo memungkinkan perhitungan estimasi harga opsi dengan mensimulasikan berbagai kemungkinan harga aset berdasarkan model stokastik yang relevan. Metode ini memiliki keunggulan utama yaitu fleksibilitasnya dalam menangani berbagai distribusi probabilitas dan fungsi *payoff* (Pramuditya, 2017). Metode Monte Carlo standar memiliki kelemahan utama berupa variansi estimator yang relatif besar, sehingga membutuhkan jumlah simulasi yang sangat banyak untuk mencapai tingkat akurasi tertentu.

Untuk meningkatkan efisiensi metode Monte Carlo, telah dikembangkan berbagai teknik reduksi variansi (*variance reduction techniques*). Teknik reduksi variansi bertujuan untuk mempercepat konvergensi simulasi dengan menurunkan variansi estimator tanpa mengubah nilai ekspektasinya (Glasserman, 2004). Di antara teknik yang umum digunakan adalah *Control Variate* dan *Antithetic Variate*. Penelitian Murwaningtyas dkk. (2024) menunjukkan bahwa baik metode *Control Variate* maupun *Antithetic Variate* mampu menghasilkan estimasi harga opsi yang lebih akurat dibandingkan Monte Carlo standar, meskipun efektivitas masing-masing metode bergantung pada jenis opsi yang dianalisis.

Selain digunakan pada penentuan harga opsi, simulasi Monte Carlo juga telah banyak diterapkan pada simulasi pergerakan harga saham. Ramadhan dan Hilmy (2024) menunjukkan bahwa Monte Carlo mampu menghasilkan distribusi probabilitas harga saham masa depan serta dapat dipadukan dengan teknik reduksi variansi untuk meningkatkan efisiensi simulasi. Hal ini menunjukkan bahwa Monte Carlo merupakan metode numerik yang fleksibel dalam berbagai permasalahan keuangan.

Penelitian Pramuditya (2017) telah menerapkan metode Monte Carlo pada penentuan harga Opsi Asia, tetapi belum membandingkan efektivitas beberapa teknik reduksi variansi. Selanjutnya, Zubedi dkk. (2022) membandingkan metode *Control Variate* dan *Antithetic Variate*, tetapi hanya pada opsi beli Asia, sehingga belum mencakup opsi jual. Murwaningtyas dkk. (2024) melakukan perbandingan metode Monte Carlo Standar, *Control Variate*, dan *Antithetic Variate*, tetapi diterapkan pada opsi *barrier knock-out* yang memiliki karakteristik berbeda dengan Opsi Asia rata-rata aritmatika. Selain itu, penelitian-penelitian tersebut umumnya berfokus pada estimasi harga opsi, sedangkan evaluasi berdasarkan interval kepercayaan sebagai ukuran reliabilitas estimator masih sangat terbatas.

Oleh karena itu, evaluasi tidak hanya perlu dilakukan terhadap nilai estimasi harga opsi, tetapi juga terhadap interval kepercayaan sebagai ukuran reliabilitas dan kestabilan hasil estimasi. Interval kepercayaan memberikan informasi penting mengenai tingkat ketelitian estimator dan secara langsung

mencerminkan efektivitas teknik reduksi variansi yang digunakan. Perbandingan metode berdasarkan interval kepercayaan menjadi aspek krusial dalam menilai keunggulan metode Monte Carlo yang diterapkan.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan untuk membandingkan metode Monte Carlo standar, *Control Variate*, dan *Antithetic Variate* dalam mengestimasi harga dan interval kepercayaan Opsi Asia dengan rata-rata aritmatika, baik untuk opsi beli maupun opsi jual. Dengan melakukan analisis perbandingan pada masing-masing jenis opsi, penelitian ini diharapkan dapat memberikan gambaran yang lebih komprehensif mengenai efisiensi dan keandalan setiap metode, serta menjadi referensi dalam pemilihan metode Monte Carlo yang tepat untuk penentuan harga Opsi Asia.

LANDASAN TEORI

Pemodelan Harga Aset

Dalam penentuan harga opsi, diperlukan suatu model matematis yang mampu merepresentasikan pergerakan harga aset. Model ini digunakan untuk mensimulasikan dinamika harga aset selama periode kontrak opsi, sehingga harga aset dapat dihitung dan digunakan dalam perhitungan *payoff*. Salah satu model yang paling umum digunakan dalam literatur keuangan adalah *Geometric Brownian Motion* (GBM).

Persamaan diferensial yang dibangun dari gerak Brown disebut sebagai persamaan diferensial stokastik. Rata - rata perubahan per satuan waktu untuk suatu proses stokastik dikenal sebagai *drift rate* dan variansi perubahan per satuan waktu dikenal dengan istilah *variance rate*. Gerak Brown didefinisikan sebagai berikut

$$\Delta x = a(x, t) \Delta t + b(x, t) \Delta W_t \quad (1)$$

dengan Δt adalah perubahan waktu, $a(x, t)$ adalah *drift rate*, $b^2(a, t)$ adalah *variance rate*, dan W_t adalah sample random berdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan variansi Δt . Persamaan (1) disebut juga dengan proses itô. Jika perubahan waktu diperkecil hingga mendekati 0 atau $\Delta t \rightarrow 0$, diperoleh persamaan diferensial stokastik sebagai berikut

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dW_t \quad (2)$$

Dimisalkan nilai x adalah S_t atau harga suatu aset pada waktu ke- t , sehingga nilai *drift rate* $a(S_t, t) = \mu S_t$ dengan μ adalah nilai harapan dari *return* aset dan *variance rate* $b^2(S_t, t) = \sigma^2 S_t^2$, dengan σ adalah volatilitas aset (standar deviasi dari *return* aset). Persamaan (2) dapat dirubah menjadi

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (3)$$

Dengan memisalkan $F(S_t) = \ln S_t$ dan berdasarkan lemma itô (Araneda, 2023) maka diperoleh:

$$\begin{aligned} dF &= \left(\frac{\partial F}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \end{aligned} \quad (4)$$

Kedua sisi dalam persamaan (4) di atas diintegrasikan antara 0 sampai t , diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_0^t dF &= \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \int_0^t \sigma dW_t \\ \ln S_t - \ln S_0 &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \\ S_t &= S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right) \\ S_t &= S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \sqrt{t} Z \right) \end{aligned} \quad (5)$$

dengan S_t adalah harga aset pada waktu ke- t , S_0 merupakan harga aset awal, dan Z adalah variabel acak berdistribusi normal standar. Bentuk solusi ini menunjukkan bahwa harga aset pada waktu t mengikuti distribusi lognormal, sehingga selalu bernilai positif. Model persamaan (5) ini selanjutnya digunakan sebagai dasar dalam proses simulasi Monte Carlo untuk menghasilkan lintasan harga aset yang diperlukan dalam perhitungan harga opsi Asia.

Opsi Asia

Opsi Asia merupakan salah satu jenis opsi yang nilai keuntungannya tidak hanya bergantung pada harga aset saat jatuh tempo, tetapi juga bergantung pada rata-rata harga aset selama periode kontrak. Jenis opsi ini disebut Opsi Asia karena pertama kali diperdagangkan di pasar Asia, terutama di Tokyo Jepang. Opsi jenis ini dinilai lebih aman dibandingkan dengan opsi biasa (opsi Eropa dan opsi Amerika), karena pada opsi biasa keuntungannya hanya bergantung pada harga saham ketika opsi tersebut dilaksanakan, sehingga jika terjadi manipulasi harga pada saat mendekati waktu jatuh tempo maka hal tersebut berpengaruh besar terhadap keuntungan yang diperoleh. Di sisi lain, pada Opsi Asia, walaupun terjadi manipulasi harga aset menjelang waktu jatuh tempo, perubahan yang terjadi pada keuntungannya tidak akan sebesar pada opsi biasa.

Selama periode kontrak T diambil n harga aset, artinya jarak waktu antara harga aset adalah $\Delta t = T/n$. Perhitungan rata-rata harga aset pada opsi asia dapat dilakukan dengan dua metode yaitu rata-rata aritmatik dan rata-rata geometrik. Pada rata-rata aritmatik, besar keuntungan yang ditawarkan dihitung dari rata-rata aritmatik dari harga saham selama periode kontrak. Pada rata-rata geometrik, besar keuntungan yang ditawarkan dihitung dari rata-rata geometrik dari harga saham selama periode kontrak. Rata-rata harga aset dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$X_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i$$

Keuntungan (*payoff*) dari opsi asia bergantung pada jenis opsinya. Pada opsi beli asia (*asian call option*), keuntungan opsi diperoleh jika rata-rata harga aset lebih besar dari harga kontrak atau *Strike price* (K). Apabila rata-rata harga aset tidak lebih dari harga kontrak maka investor tidak mendapatkan keuntungan dari Opsi. Sebaliknya, pada opsi jual asia (*asian put option*), keuntungan opsi diperoleh jika rata-rata harga aset kurang dari harga kontrak atau *Strike price* (K). Apabila rata-rata harga aset tidak lebih dari harga kontrak maka investor tidak mendapatkan keuntungan dari Opsi. Besar nilai keuntungan opsi asia adalah

$$\text{Payoff} = \begin{cases} \max(X_T - K, 0), & \text{Opsi Beli Asia} \\ \max(K - X_T, 0), & \text{Opsi Jual Asia} \end{cases}$$

Harga Opsi Asia adalah hasil dari nilai harapan atau ekspektasi dari keuntungan opsi pada waktu jatuh tempo yang di *present value*-kan oleh suku bunga bebas resiko (r) dan waktu (T). Secara matematis, harga Opsi Asia adalah

- a. Harga Opsi Beli Asia dengan rata-rata Aritmatika (C)

$$C = e^{-rT} E \left(\max \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i - K, 0 \right) \right)$$

- b. Harga Opsi Jual Asia dengan rata-rata Aritmatika (P)

$$P = e^{-rT} \max \left(K - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i, 0 \right)$$

Simulasi Monte Carlo

Metode Simulasi Monte Carlo merupakan salah satu metode numerik berbasis simulasi yang digunakan untuk mengestimasi nilai ekspektasi dari suatu peubah acak melalui pembangkitan bilangan acak. Prinsip dasar metode simulasi Monte Carlo dalam penentuan harga opsi adalah dengan mensimulasikan harga aset berdasarkan model stokastik, kemudian dihitung harga opsinya. Proses tersebut diulangi sebanyak m kali. Harga opsi dengan metode simulasi Monte Carlo adalah nilai ekspektasi atau rata-rata dari m harga opsi yang diperoleh.

Dimisalkan θ adalah parameter yang ingin diestimasi dan dapat dinyatakan sebagai nilai ekspektasi dari suatu fungsi peubah acak, yaitu

$$\theta = E(g(X))$$

dengan $g(X)$ adalah fungsi *payoff* yang bergantung pada lintasan harga aset. Untuk mengestimasi θ , dibangkitkan sebanyak m sampel acak independen $X_1, X_2, \dots, X_m$ yang mengikuti distribusi probabilitas tertentu. Estimator Monte Carlo untuk θ didefinisikan sebagai

$$\hat{\theta} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g(X_i).$$

Berdasarkan Hukum Bilangan Besar, estimator tersebut bersifat konsisten, yaitu

$$\hat{\theta} \xrightarrow{a.s.} \theta \text{ ketika } m \rightarrow \infty$$

Berdasarkan Teorema Limit Pusat, untuk ukuran sampel yang cukup besar, distribusi estimator mendekati distribusi normal, sehingga dapat dituliskan

$$\sqrt{m} \frac{\hat{\theta} - \theta}{s} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

dengan s merupakan simpangan baku sampel. Hasil ini memungkinkan pembentukan interval kepercayaan untuk parameter θ , sehingga tidak hanya diperoleh estimasi titik, tetapi juga ukuran ketidakpastian dari estimasi tersebut.

Untuk Opsi Asia, nilai *payoff* diperoleh dengan terlebih dahulu mensimulasikan lintasan harga aset menggunakan model Geometric Brownian Motion pada persamaan (5), kemudian menghitung rata-rata harga aset (baik aritmatika maupun geometri) sepanjang lintasan tersebut, dan selanjutnya menentukan *payoff* berdasarkan jenis opsi (beli atau jual).

Monte Carlo Control Variate

Metode Control Variate merupakan salah satu teknik reduksi variansi yang digunakan untuk meningkatkan efisiensi estimasi dalam simulasi Monte Carlo. Metode ini menjadi penting karena Monte Carlo standar memiliki kelemahan utama berupa variansi estimator yang relatif besar dan laju konvergensi yang lambat. Akibatnya, untuk memperoleh tingkat akurasi yang lebih tinggi, diperlukan jumlah simulasi yang sangat besar, yang berdampak pada meningkatnya biaya komputasi. Oleh karena itu, diperlukan suatu pendekatan yang mampu meningkatkan akurasi tanpa harus secara signifikan menambah jumlah simulasi, salah satunya melalui teknik *Control Variate*.

Prinsip dasar metode ini adalah memanfaatkan variabel acuan (*control variable*) yang memiliki korelasi tinggi dengan variabel yang diestimasi, serta memiliki nilai ekspektasi yang diketahui secara analitik. Dengan memanfaatkan informasi tambahan tersebut, variansi estimator dapat dikurangi tanpa mengubah nilai ekspektasinya.

Misalkan $\theta = E(X)$ adalah parameter yang ingin diestimasi, dan terdapat suatu variabel acuan Y dengan nilai ekspektasi $E[Y] = \mu_Y$ yang diketahui. Dibentuk variabel koreksi *Control Variate* pada setiap simulasi ke i sebagai berikut

$$X_i + c(Y_i - \mu_Y)$$

dengan c adalah konstanta yang disebut sebagai koefisien kontrol. Estimator Monte Carlo *Control Variate* adalah

$$\hat{\theta}_{CV} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i + c(Y_i - \mu_Y) \quad (6)$$

Estimator ini tetap tidak bias karena nilai $E(X + c(Y - \mu_Y)) = \theta$ dan Variansinya adalah

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + c(Y - \mu_Y)) &= \text{Var}(X + cY) \\ &= \text{Var}(X) + 2c \text{Cov}(X, Y) + c^2 \text{Var}(Y) \end{aligned}$$

Tujuan utama pemilihan nilai c adalah untuk meminimalkan variansi. Untuk memperoleh nilai optimal c , dilakukan minimisasi terhadap variansi tersebut dengan mendiferensialkan terhadap c

$$\frac{d}{dc} (\text{Var}(X) + 2c \text{Cov}(X, Y) + c^2 \text{Var}(Y)) = 2 \text{Cov}(X, Y) + 2c \text{Var}(Y) = 0$$

Diperoleh nilai optimal dari c adalah

$$c^* = -\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)} \quad (7)$$

Variansi estimator *Control Variate* menjadi

$$\text{Var}(\hat{\theta}_{cv}) = \frac{1}{m} \text{Var}(X)(1 - \rho_{XY}^2)$$

dengan ρ_{XY} adalah koefisien korelasi antara X dan Y . Nilai korelasi X dan Y yang menjadi pengurang mengindikasikan sebagai semakin tinggi korelasi antara variabel utama (X) dan variabel kontrol (Y), maka semakin besar penurunan variansi yang dapat dicapai. Dengan demikian, metode *Control Variate*

secara langsung mampu mengatasi kelemahan Monte Carlo standar dengan mempercepat konvergensi estimator melalui reduksi variansi, tanpa meningkatkan jumlah simulasi.

Monte Carlo Antithetic Variate

Metode Antithetic Variate merupakan salah satu teknik reduksi variansi dalam simulasi Monte Carlo yang bertujuan untuk meningkatkan efisiensi estimasi tanpa menambah jumlah simulasi secara signifikan. Teknik ini dikembangkan sebagai respons terhadap kelemahan metode Monte Carlo standar yang memiliki variansi relatif besar dan laju konvergensi yang lambat, sehingga membutuhkan jumlah simulasi yang sangat banyak untuk mencapai tingkat akurasi tertentu. Prinsip dasar metode *Antithetic Variate* adalah memanfaatkan pasangan bilangan acak yang saling berlawanan (*antithetic*) untuk menghasilkan dua estimasi yang berkorelasi negatif. Dengan mengombinasikan kedua estimasi tersebut, fluktuasi hasil simulasi dapat dikurangi sehingga variansi estimator menjadi lebih kecil.

Misalkan $\theta = E(X)$ adalah parameter yang ingin diestimasi, dengan $X_i = g(Z_i)$ menyatakan *payoff* pada simulasi ke- i dengan $Z_i \sim N(0,1)$. Dalam metode *Antithetic Variate*, untuk setiap Z_i dibangkitkan pasangan antitetiknya $-Z_i$, sehingga diperoleh dua nilai *payoff*:

$$X_i^{(1)} = g(Z_i), \quad X_i^{(2)} = g(-Z_i)$$

Estimator *Antithetic Variate* kemudian diperoleh dengan merata-ratakan pasangan *payoff* tersebut, yaitu

$$\hat{\theta}_{AV} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{X_i^{(1)} + X_i^{(2)}}{2} \quad (8)$$

Estimator ini tetap tidak bias karena peubah acak Z_i dan $-Z_i$ memiliki distribusi yang identik, sehingga $E(X_i^{(1)}) = E(X_i^{(2)}) = \theta$. Keunggulan utama metode *Antithetic Variate* terletak pada kemampuannya dalam mengurangi variansi estimator. Variansi dari rata-rata pasangan *payoff* dapat dinyatakan sebagai

$$\text{Var}\left(\frac{X_i^{(1)} + X_i^{(2)}}{2}\right) = \frac{1}{4} \left(\text{Var}(X_i^{(1)}) + \text{Var}(X_i^{(2)}) + 2\text{Cov}(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}) \right)$$

Karena $X_i^{(1)}$ dan $X_i^{(2)}$ memiliki distribusi yang sama, maka $\text{Var}(X_i^{(1)}) = \text{Var}(X_i^{(2)}) = \text{Var}(X)$ sehingga diperoleh

$$\text{Var}\left(\frac{X_i^{(1)} + X_i^{(2)}}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{Var}(X)(1 + \rho)$$

dengan ρ adalah koefisien korelasi antara $X_i^{(1)}$ dan $X_i^{(2)}$. Apabila pasangan antitetik menghasilkan korelasi negatif ($\rho < 0$), maka variansi estimator akan lebih kecil dibandingkan dengan metode Monte Carlo standar. Dengan demikian, metode *Antithetic Variate* mampu menghasilkan estimator yang lebih stabil dan memiliki variansi yang lebih kecil dibandingkan metode Monte Carlo standar, tanpa memerlukan informasi tambahan seperti pada metode *Control Variate*.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian kuantitatif berbasis simulasi numerik yang bertujuan untuk membandingkan kinerja metode Monte Carlo standar, Monte Carlo Control Variate, dan Monte Carlo *Antithetic Variate* dalam mengestimasi harga serta interval kepercayaan Opsi Asia rata-rata aritmatika. Penelitian tidak menggunakan data historis, melainkan data simulasi yang dibangkitkan berdasarkan model stokastik Geometric Brownian Motion (GBM). Penggunaan data simulasi memungkinkan seluruh parameter model dikendalikan secara penuh sehingga perbandingan antar metode dapat dilakukan secara objektif dan konsisten. Parameter yang digunakan dalam simulasi meliputi harga awal aset (S_0), harga eksekusi (K), suku bunga bebas resiko (r), volatilitas (σ), waktu jatuh tempo (T), jumlah pembagian waktu (n), jumlah simulasi (m). Nilai masing-masing parameter ditentukan pada

awal penelitian dan digunakan secara sama pada ketiga metode agar hasil yang diperoleh dapat dibandingkan secara adil.

Penelitian diawali dengan pembangkitan bilangan acak berdistribusi normal standar ($Z \sim N(0,1)$). Bilangan acak tersebut digunakan untuk mensimulasikan lintasan harga aset berdasarkan model *Geometric Brownian Motion* sebagaimana dinyatakan pada persamaan (5). Dari setiap lintasan harga aset dihitung rata-rata harga aset selama periode kontrak, kemudian dihitung nilai *payoff* opsi Asia sesuai dengan jenis opsi yang digunakan. Nilai *payoff* selanjutnya didiskontokan menggunakan suku bunga bebas risiko sehingga diperoleh estimasi harga opsi.

Pada metode Monte Carlo Standar, estimasi harga opsi diperoleh sebagai rata-rata seluruh *payoff* hasil simulasi. Metode ini digunakan sebagai metode dasar (*baseline*) dalam penelitian.

Pada metode Monte Carlo *Control Variate*, variabel kontrol yang digunakan adalah harga Opsi Asia rata-rata geometri. Variabel ini dipilih karena mempunyai korelasi yang sangat tinggi dengan harga Opsi Asia rata-rata aritmatika yang diestimasi. Koefisien kontrol optimum dihitung menggunakan persamaan (7) dengan X menyatakan *payoff* Opsi Asia rata-rata aritmatika hasil simulasi Monte Carlo, sedangkan Y merupakan *payoff* Opsi Asia rata-rata geometri. Selanjutnya estimator Monte Carlo *Control Variate* dihitung menggunakan persamaan (6).

Pada metode Monte Carlo *Antithetic Variate*, untuk setiap bilangan acak normal standar Z_i yang sudah dibangkitkan sebelumnya, dihitung pasangan antitetikanya $-Z_i$. Kedua bilangan acak tersebut digunakan untuk menghasilkan dua lintasan harga aset yang berbeda. Dari kedua lintasan tersebut dihitung *payoff* masing-masing, kemudian dirata-rata menggunakan persamaan (8).

Selain menghitung estimasi harga opsi, penelitian ini juga menghitung interval kepercayaan estimator sebagai ukuran ketelitian hasil simulasi. Berdasarkan Teorema Limit Pusat, interval kepercayaan sebesar $(1 - \alpha)$ dihitung menggunakan rumus:

$$\hat{V} \pm Z_{\alpha/2} \left(\frac{s}{\sqrt{m}} \right)$$

dengan $\hat{V}$ adalah estimasi harga opsi, s adalah simpangan baku hasil simulasi, dan $z_{\alpha/2}$ adalah nilai kuantil distribusi normal standar. Pada penelitian ini digunakan $\alpha = 5\%$ atau interval kepercayaan 95% sehingga nilai $z_{0,025} = 1,96$.

Kinerja ketiga metode dibandingkan berdasarkan estimasi harga opsi dan interval kepercayaan. Ketiga metode menggunakan parameter simulasi yang sama, sehingga perbedaan hasil yang diperoleh sepenuhnya disebabkan oleh karakteristik masing-masing metode.

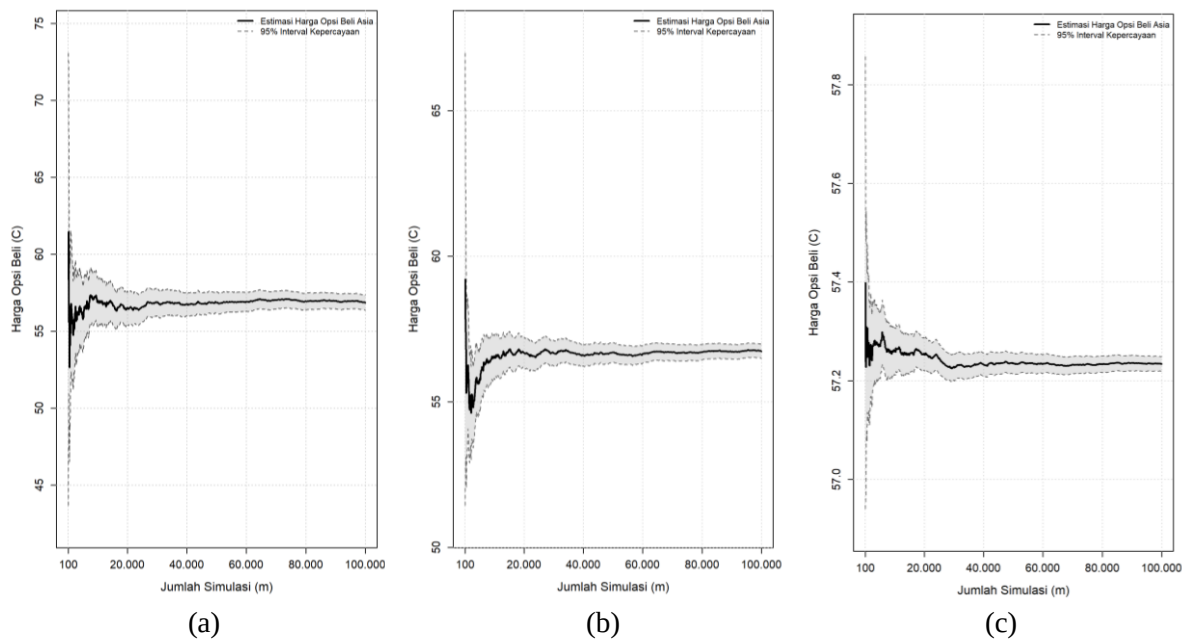
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dilakukan perbandingan metode Monte Carlo Standar, Monte Carlo *Control Variate*, dan Monte Carlo *Antithetic Variate* dalam mengestimasi harga Opsi Asia rata-rata aritmatika beserta interval kepercayaannya. Simulasi dilakukan menggunakan harga awal aset (S_0) sebesar 1000, harga eksekusi (K) sebesar 1000, suku bunga bebas risiko (r) sebesar 0,05, volatilitas (σ) sebesar 0,20, waktu jatuh tempo (T) selama 1 tahun, serta jumlah waktu pengamatan (n) sebanyak 12 kali. Ketiga metode menggunakan parameter simulasi yang sama, sehingga perbedaan hasil yang diperoleh hanya dipengaruhi oleh karakteristik masing-masing metode.

Jumlah simulasi (m) divariasikan mulai dari 100 hingga 100.000 simulasi dengan kenaikan sebanyak 100 simulasi pada setiap iterasi. Variasi jumlah simulasi ini bertujuan untuk mengamati pola konvergensi estimasi harga opsi dan perubahan interval kepercayaan seiring dengan bertambahnya jumlah simulasi. Selanjutnya, hasil estimasi dibandingkan untuk dua jenis opsi, yaitu opsi beli (*Asian Call Option*) dan opsi jual (*Asian Put Option*). Pada masing-masing jenis opsi akan dibahas perubahan estimasi harga opsi dan lebar interval kepercayaan yang dihasilkan oleh ketiga metode, sehingga dapat diketahui metode yang memberikan estimasi paling stabil dan presisi.

Opsi Beli Asia

Pembahasan pada bagian ini difokuskan pada hasil estimasi harga opsi beli Asia rata-rata aritmatika yang diperoleh menggunakan metode Monte Carlo Standar, *Antithetic Variate*, dan *Control Variate*. Analisis dilakukan terhadap perubahan estimasi harga opsi dan interval kepercayaan 95% pada berbagai jumlah simulasi, yaitu mulai dari 100 hingga 100.000 simulasi. Untuk mengevaluasi pengaruh jumlah simulasi terhadap hasil estimasi, digunakan tujuh titik pengamatan yang mewakili proses konvergensi, yaitu 100, 500, 1.000, 5.000, 10.000, 50.000, dan 100.000 simulasi. Nilai-nilai tersebut dipilih untuk menggambarkan perubahan estimasi dari tahap awal simulasi hingga mencapai kondisi yang relatif stabil. Hasil simulasi divisualisasikan dalam Gambar 1, sedangkan ringkasan nilai estimasi harga opsi dan interval kepercayaan pada beberapa jumlah simulasi yang mewakili proses konvergensi disajikan pada Tabel 1.



GAMBAR 1. Estimasi harga opsi beli Asia rata-rata aritmatika dan interval kepercayaan 95% menggunakan metode Monte Carlo Standar (a), *Antithetic Variate* (b), dan *Control Variate* (c).

TABEL 1. ESTIMASI HARGA OPSI BELI ASIA RATAAN ARITMATIKA DAN INTERVAL KEPERCAYAAN 95% PADA BEBERAPA JUMLAH SIMULASI

Jumlah Simulasi	MC Standar	MC Antithetic Variate	MC Control Variate
100	58,38 (43,69 – 73,07)	59,21 (51,44 – 66,97)	57,40 (56,94 – 57,86)
500	52,65 (46,52 – 58,79)	55,31 (52,04 – 58,57)	57,29 (57,09 – 57,49)
1.000	56,79 (52,11 – 61,46)	56,20 (53,87 – 58,53)	57,28 (57,13 – 57,42)
5.000	55,78 (53,63 – 57,94)	55,72 (54,67 – 56,78)	57,27 (57,20 – 57,34)
10.000	56,99 (55,44 – 58,54)	56,55 (55,80 – 57,30)	57,26 (57,21 – 57,31)
50.000	56,86 (56,17 – 57,55)	56,69 (56,36 – 57,03)	57,24 (57,21 – 57,26)
100.000	56,86 (56,38 – 57,35)	56,73 (56,49 – 56,97)	57,23 (57,22 – 57,25)

Berdasarkan Gambar 1 terlihat bahwa ketiga metode menghasilkan estimasi harga opsi yang semakin konvergen seiring bertambahnya jumlah simulasi. Pada awal simulasi, terutama ketika jumlah simulasi masih relatif sedikit, estimasi harga opsi masih mengalami fluktuasi yang cukup besar. Namun, fluktuasi tersebut semakin berkurang ketika jumlah simulasi meningkat hingga akhirnya estimasi harga cenderung stabil. Selain itu, interval kepercayaan 95% juga tampak semakin menyempit pada seluruh metode, yang menunjukkan bahwa tingkat presisi estimasi meningkat seiring bertambahnya jumlah simulasi. Temuan tersebut sesuai dengan karakteristik simulasi Monte Carlo, di

mana galat standar estimator berbanding terbalik dengan akar kuadrat jumlah simulasi, sehingga penambahan jumlah simulasi akan meningkatkan kestabilan dan ketelitian hasil estimasi.

Pada metode Monte Carlo Standar, estimasi harga opsi menunjukkan fluktuasi yang paling besar dibandingkan dua metode lainnya. Berdasarkan Tabel 1, pada jumlah simulasi 100 diperoleh estimasi harga opsi sebesar 58,38 dengan interval kepercayaan 95% sebesar (43,69; 73,07). Interval kepercayaan yang sangat lebar tersebut menunjukkan bahwa variansi estimator masih tinggi, sehingga ketidakpastian hasil estimasi juga besar. Seiring bertambahnya jumlah simulasi, estimasi harga mulai menunjukkan konvergensi menuju nilai yang relatif stabil. Pada 100.000 simulasi diperoleh estimasi harga sebesar 56,86 dengan interval kepercayaan (56,38; 57,35). Penyempitan interval kepercayaan tersebut menunjukkan bahwa penambahan jumlah simulasi mampu mengurangi variansi estimator sehingga presisi estimasi meningkat secara bertahap.

Metode *Antithetic Variate* menghasilkan estimasi yang lebih stabil dibandingkan Monte Carlo Standar. Hal tersebut terlihat pada Gambar 1, di mana fluktuasi estimasi harga lebih cepat mereda ketika jumlah simulasi bertambah. Berdasarkan Tabel 1, pada 100 simulasi diperoleh estimasi sebesar 59,21 dengan interval kepercayaan (51,44; 66,97), sedangkan pada 100.000 simulasi estimasi menjadi 56,73 dengan interval kepercayaan (56,49; 56,97). Dibandingkan Monte Carlo Standar, interval kepercayaan yang dihasilkan metode *Antithetic Variate* secara konsisten lebih sempit pada jumlah simulasi yang sama. Hasil ini menunjukkan bahwa penggunaan pasangan bilangan acak antitetik berhasil mengurangi variansi estimator melalui korelasi negatif antar pasangan simulasi, sehingga estimasi yang diperoleh menjadi lebih presisi tanpa perlu menambah jumlah simulasi secara signifikan.

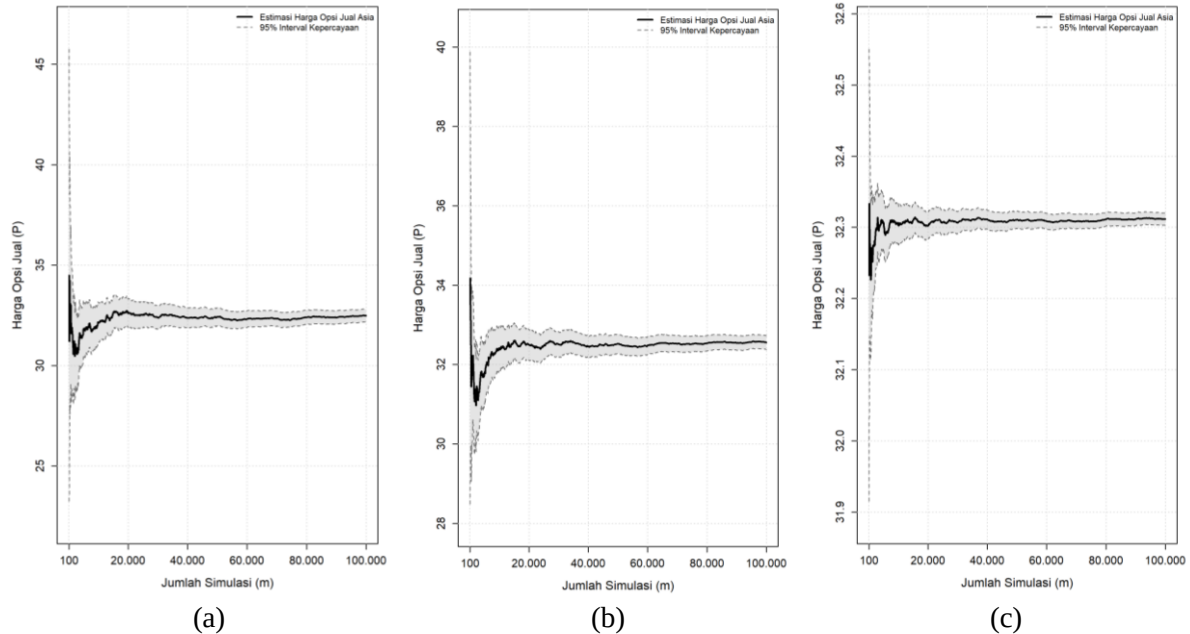
Hasil yang paling baik diperoleh menggunakan metode *Control Variate*. Berdasarkan Gambar 1 terlihat bahwa estimasi harga opsi relatif stabil bahkan sejak jumlah simulasi masih rendah. Tabel 1 menunjukkan bahwa pada 100 simulasi diperoleh estimasi harga sebesar 57,40 dengan interval kepercayaan (56,94; 57,86). Lebar interval kepercayaan tersebut jauh lebih kecil dibandingkan Monte Carlo Standar maupun *Antithetic Variate*. Ketika jumlah simulasi ditingkatkan hingga 100.000, estimasi harga menjadi 57,23 dengan interval kepercayaan (57,22; 57,25). Perubahan nilai estimasi yang relatif kecil serta interval kepercayaan yang sangat sempit menunjukkan bahwa metode *Control Variate* mampu menghasilkan estimasi yang sangat stabil dan presisi. Kondisi tersebut terjadi karena metode ini memanfaatkan rataan geometri sebagai variabel kontrol yang memiliki korelasi kuat dengan *payoff* opsi Asia rataan aritmatika, sehingga variansi estimator dapat dikurangi secara signifikan.

Perbandingan ketiga metode menunjukkan bahwa seluruh metode menghasilkan estimasi harga yang semakin konvergen ketika jumlah simulasi diperbesar. Pada jumlah simulasi yang besar, estimasi harga yang dihasilkan ketiga metode relatif mendekati nilai yang sama, meskipun terdapat sedikit perbedaan akibat karakteristik masing-masing estimator. Perbedaan utama di antara ketiga metode terletak pada tingkat presisi estimasi. Monte Carlo Standar memerlukan jumlah simulasi yang lebih besar untuk menghasilkan estimasi yang stabil, sedangkan *Antithetic Variate* mampu mempercepat proses konvergensi melalui teknik pengurangan variansi menggunakan pasangan bilangan acak antitetik. Sementara itu, *Control Variate* memberikan performa terbaik karena menghasilkan estimasi yang stabil sejak jumlah simulasi relatif kecil dengan interval kepercayaan yang paling sempit. Pada 100 simulasi lebar interval kepercayaan Monte Carlo Standar mencapai 29,38, *Antithetic Variate* sebesar 15,53, sedangkan *Control Variate* hanya 0,92. Pada 100.000 simulasi lebar interval tersebut menyusut menjadi sekitar 0,97, 0,48, dan 0,03. Hal ini menunjukkan bahwa penggunaan *Control Variate* mampu menurunkan ketidakpastian estimasi secara jauh lebih efektif dibandingkan dua metode lainnya. Dengan demikian, berdasarkan hasil simulasi pada penelitian ini, metode *Control Variate* merupakan metode yang paling efisien dalam mengestimasi harga opsi beli Asia rataan aritmatika karena mampu menghasilkan estimasi dengan tingkat presisi yang lebih tinggi dibandingkan Monte Carlo Standar maupun *Antithetic Variate*.

Opsi Jual Asia

Pembahasan pada bagian ini difokuskan pada hasil estimasi harga opsi jual Asia rataan aritmatika yang diperoleh menggunakan metode Monte Carlo Standar, *Antithetic Variate*, dan *Control Variate*. Analisis dilakukan terhadap perubahan estimasi harga opsi dan interval kepercayaan 95% pada berbagai jumlah simulasi, yaitu mulai dari 100 hingga 100.000 simulasi. Untuk mengevaluasi pengaruh

jumlah simulasi terhadap hasil estimasi, digunakan tujuh titik pengamatan yang mewakili proses konvergensi, yaitu 100, 500, 1.000, 5.000, 10.000, 50.000, dan 100.000 simulasi. Nilai-nilai tersebut dipilih untuk menggambarkan perubahan estimasi dari tahap awal simulasi hingga mencapai kondisi yang relatif stabil. Hasil simulasi divisualisasikan dalam Gambar 2, sedangkan ringkasan nilai estimasi harga opsi dan interval kepercayaan pada beberapa jumlah simulasi yang mewakili proses konvergensi disajikan pada Tabel 2.



GAMBAR 2. Estimasi harga opsi jual Asia rata-rata aritmatika dan interval kepercayaan 95% menggunakan metode Monte Carlo Standar (a), Antithetic Variate (b), dan Control Variate (c).

TABEL 2. ESTIMASI HARGA OPSI JUAL ASIA RATA-RATA ARITMATIKA DAN INTERVAL KEPERCAYAAN 95% PADA BEBERAPA JUMLAH SIMULASI

Jumlah Simulasi	MC Standar	MC Antithetic Variate	MC Control Variate
100	34,49 (23,24 – 45,75)	34,18 (28,48 – 39,87)	32,23 (31,92 – 32,55)
500	33,08 (28,42 – 37,74)	31,44 (29,06 – 33,83)	32,24 (32,11 – 32,36)
1.000	31,74 (28,54 – 34,93)	32,15 (30,44 – 33,86)	32,27 (32,18 – 32,36)
5.000	31,82 (30,42 – 33,22)	31,77 (31,00 – 32,54)	32,31 (32,27 – 32,34)
10.000	32,13 (31,14 – 33,13)	32,41 (31,86 – 32,95)	32,30 (32,28 – 32,33)
50.000	32,43 (31,98 – 32,88)	32,52 (32,28 – 32,77)	32,31 (32,30 – 32,32)
100.000	32,47 (32,15 – 32,79)	32,55 (32,38 – 32,73)	32,31 (32,30 – 32,32)

Berdasarkan Gambar 2 terlihat bahwa ketiga metode menghasilkan estimasi harga opsi jual Asia yang semakin konvergen seiring bertambahnya jumlah simulasi. Pada awal simulasi, ketika jumlah simulasi masih relatif sedikit, estimasi harga opsi masih mengalami fluktuasi yang cukup besar, terutama pada metode Monte Carlo Standar dan Antithetic Variate. Namun, fluktuasi tersebut semakin berkurang ketika jumlah simulasi ditingkatkan hingga akhirnya estimasi harga cenderung stabil. Selain itu, interval kepercayaan 95% pada ketiga metode juga semakin menyempit seiring bertambahnya jumlah simulasi. Hal ini menunjukkan bahwa peningkatan jumlah simulasi mampu meningkatkan presisi estimasi, sebagaimana karakteristik simulasi Monte Carlo yang memiliki galat standar berbanding terbalik dengan akar kuadrat jumlah simulasi.

Pada metode Monte Carlo Standar, estimasi harga opsi jual menunjukkan fluktuasi yang cukup besar pada jumlah simulasi yang sedikit. Berdasarkan Tabel 2, pada 100 simulasi diperoleh estimasi harga sebesar 34,49 dengan interval kepercayaan 95% sebesar (23,24; 45,75). Interval kepercayaan yang sangat lebar tersebut menunjukkan bahwa variansi estimator masih tinggi, sehingga ketidakpastian estimasi juga besar. Seiring bertambahnya jumlah simulasi, estimasi harga semakin mendekati nilai konvergen. Pada 100.000 simulasi diperoleh estimasi sebesar 32,47 dengan interval kepercayaan (32,15; 32,79). Penyempitan interval kepercayaan tersebut menunjukkan bahwa

penambahan jumlah simulasi secara bertahap mampu meningkatkan kestabilan dan presisi estimasi harga opsi.

Metode *Antithetic Variate* menghasilkan estimasi yang lebih stabil dibandingkan Monte Carlo Standar. Berdasarkan Gambar 2 terlihat bahwa fluktuasi estimasi mulai mereda pada jumlah simulasi yang lebih kecil dibandingkan Monte Carlo Standar. Hal tersebut juga didukung oleh Tabel 2, di mana pada 100 simulasi diperoleh estimasi harga sebesar 34,18 dengan interval kepercayaan (28,48; 39,87), sedangkan pada 100.000 simulasi estimasi menjadi 32,55 dengan interval kepercayaan (32,38; 32,73). Dibandingkan Monte Carlo Standar, interval kepercayaan yang dihasilkan metode *Antithetic Variate* secara konsisten lebih sempit pada jumlah simulasi yang sama. Penggunaan pasangan bilangan acak antitetik menghasilkan korelasi negatif antar pasangan simulasi, sehingga variansi estimator berkurang dan estimasi menjadi lebih presisi tanpa memerlukan peningkatan jumlah simulasi yang terlalu besar.

Hasil terbaik kembali diperoleh menggunakan metode *Control Variate*. Berdasarkan Gambar 2 terlihat bahwa estimasi harga opsi relatif stabil bahkan sejak jumlah simulasi masih rendah. Tabel 2 menunjukkan bahwa pada 100 simulasi diperoleh estimasi harga sebesar 32,23 dengan interval kepercayaan (31,92; 32,55). Lebar interval kepercayaan tersebut jauh lebih kecil dibandingkan Monte Carlo Standar maupun *Antithetic Variate*. Ketika jumlah simulasi ditingkatkan menjadi 100.000, estimasi harga hanya berubah menjadi 32,31 dengan interval kepercayaan (32,30; 32,32). Perubahan estimasi yang sangat kecil serta interval kepercayaan yang sangat sempit menunjukkan bahwa metode *Control Variate* mampu menghasilkan estimasi yang stabil dan presisi, meskipun menggunakan jumlah simulasi yang relatif sedikit. Hasil tersebut diperoleh karena metode *Control Variate* memanfaatkan rata-rata geometri sebagai variabel kontrol yang memiliki korelasi tinggi dengan *payoff* opsi Asia rata-rata aritmatika, sehingga variansi estimator dapat dikurangi secara signifikan.

Perbandingan ketiga metode menunjukkan bahwa seluruh metode menghasilkan estimasi harga opsi jual yang semakin konvergen ketika jumlah simulasi diperbesar. Pada jumlah simulasi yang besar, estimasi harga yang dihasilkan ketiga metode relatif mendekati nilai yang sama, meskipun terdapat sedikit perbedaan akibat karakteristik masing-masing estimator. Perbedaan utama di antara ketiga metode kembali terletak pada tingkat presisi estimasi. Monte Carlo Standar membutuhkan jumlah simulasi yang lebih besar untuk memperoleh estimasi yang stabil, sedangkan *Antithetic Variate* mampu meningkatkan efisiensi melalui teknik pengurangan variansi menggunakan pasangan bilangan acak antitetik. Sementara itu, *Control Variate* menghasilkan estimasi yang paling stabil dengan interval kepercayaan yang paling sempit sejak jumlah simulasi relatif kecil. Berdasarkan Tabel 2, pada 100 simulasi lebar interval kepercayaan Monte Carlo Standar mencapai 22,51, *Antithetic Variate* sebesar 11,39, sedangkan *Control Variate* hanya sebesar 0,63. Ketika jumlah simulasi ditingkatkan menjadi 100.000, lebar interval kepercayaan masing-masing metode menyusut menjadi sekitar 0,64, 0,35, dan 0,02. Perbedaan tersebut menunjukkan bahwa teknik pengurangan variansi yang diterapkan pada metode *Control Variate* mampu meningkatkan presisi estimasi secara signifikan tanpa memerlukan jumlah simulasi yang sangat besar. Dengan demikian, berdasarkan hasil simulasi pada penelitian ini, metode *Control Variate* merupakan metode yang paling efisien dalam mengestimasi harga opsi jual Asia rata-rata aritmatika karena mampu menghasilkan estimasi dengan tingkat presisi yang lebih tinggi dibandingkan Monte Carlo Standar maupun *Antithetic Variate*.

KESIMPULAN DAN SARAN

Penelitian ini membandingkan kinerja metode Monte Carlo Standar, *Antithetic Variate*, dan *Control Variate* dalam mengestimasi harga opsi Asia rata-rata aritmatika untuk opsi beli maupun opsi jual. Berdasarkan hasil simulasi, ketiga metode menghasilkan estimasi harga opsi yang semakin konvergen seiring bertambahnya jumlah simulasi. Selain itu, interval kepercayaan 95% yang dihasilkan juga semakin menyempit, menunjukkan bahwa peningkatan jumlah simulasi mampu meningkatkan presisi estimasi.

Metode Monte Carlo Standar menghasilkan estimasi yang masih berfluktuasi pada jumlah simulasi yang kecil serta memerlukan jumlah simulasi yang relatif besar untuk memperoleh estimasi yang stabil. Metode *Antithetic Variate* mampu meningkatkan efisiensi simulasi dengan mengurangi variansi estimator melalui penggunaan pasangan bilangan acak antitetik sehingga menghasilkan interval kepercayaan yang lebih sempit dibandingkan Monte Carlo Standar. Sementara itu, metode *Control*

Variate memberikan kinerja terbaik baik pada estimasi harga opsi beli maupun opsi jual. Penggunaan rata-rata geometri sebagai variabel kontrol mampu mengurangi variansi estimator secara signifikan sehingga menghasilkan estimasi yang stabil dengan interval kepercayaan paling sempit, bahkan sejak jumlah simulasi yang relatif sedikit.

Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan metode estimasi harga opsi Asia dengan mengombinasikan teknik *Control Variate* dengan metode pengurangan variansi lainnya, seperti *Importance Sampling* atau *Stratified Sampling*, maupun menerapkannya pada model harga saham yang lebih kompleks, misalnya model volatilitas stokastik atau model dengan lompatan (*jump diffusion*). Selain itu, penelitian lanjutan juga dapat mengevaluasi efisiensi metode-metode tersebut pada berbagai karakteristik opsi Asia, seperti variasi waktu pengamatan, tingkat volatilitas, dan waktu jatuh tempo yang berbeda.

REFERENSI

- Araneda, A.A. (2023) "Price modelling under generalized fractional Brownian motion," Institute of Financial Complex Systems, Department of Finance, Masaryk University, Czech Republic. Tersedia pada: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.12042>.
- Glasserman, P. (2004) *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York: Springer.
- Hilmi, M.R., Nurtiyasari, D. dan Syahputra, A. (2022) "Pemanfaatan Skewness dan Kurtosis dalam Menentukan Harga Opsi Beli Asia," *Quadratic : Journal of Innovation and Technology in Mathematics and Mathematics Education*, 2(1), hal. 7–15.
- Hull, J.C. (2022) *Options, Futures, and Other Derivatives*. 11th ed. Pearson Education Limited.
- Kamila, I. dan Andriyati, A. (2023) "Simulasi Harga Opsi Call Asia Dengan Suku Bunga Tidak Konstan," *Euler : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, 11(1), hal. 146–153.
- Mooy, M.N., Rusgiyono, A. dan Rahmawati, R. (2017) "Penentuan harga opsi put dan call tipe Eropa terhadap saham menggunakan model black-scholes," *Jurnal Gaussian*, 6(3), hal. 407–417.
- Murwaningtyas, C.E. et al. (2024) "Perbandingan Metode Monte Carlo Antithetic Variate dan Control Variate dalam Penentuan Harga Opsi Barrier Knock-Out," *Euler : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, 12(1), hal. 37–44. Tersedia pada: <https://doi.org/10.37905/euler.v12i1.25128>.
- Pramuditya, S.A. (2017) "Penentuan Harga Opsi Asia Dengan Metode Monte Carlo," *Jurnal Matematika "MANTIK"*, 3(1), hal. 46. Tersedia pada: <https://doi.org/10.15642/mantik.2017.3.1.46-50>.
- Ramadhan, A.T. dan Hilmy, F. (2024) "Pendekatan Metode Monte Carlo untuk Simulasi Pergerakan Harga Saham," *Jurnal Teknik Mesin, Industri, Elektro Dan Ilmu Komputer*, 2(3), hal. 46–55.
- Zubedi, F. et al. (2022) "Penentuan Harga Beli Opsi Asia Menggunakan Monte Carlo-Antithetic Variate dan Monte Carlo-Control," *Euler : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, 10(1), hal. 7–14.