

Generalisasi Representasi Lévy-Khintchine untuk proses Aditif dengan Ukuran Lévy Bergantung Waktu

Eka Rahmi Kahar^{a)*}, Yudi Mahatma^{b)}, Debby Agustine^{c)},
Nayla Fauziah^{d)}, Alnita Khairunnisa^{e)}

*Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Jakarta
Jalan Rawamangun Muka Raya RT 11/RW 14 Jakarta Timur 13220, Indonesia*

Email: ^{a)}eka.rahmi@unj.ac.id, ^{b)}yudi_mahatma@unj.ac.id, ^{c)}debbyagustine@gmail.com,
^{d)}naylafauzh@gmail.com, ^{e)}alnita.khrnsa@gmail.com

Abstract

The classical Lévy-Khintchine representation fundamentally relies on the stationarity assumption of Lévy processes, implying that their characteristic triplets remain constant over time. This paper investigates the extension of this representation to the class of additive processes, namely stochastic processes with independent increments that relax the stationarity condition. By employing the stochastic calculus for semimartingales and Poisson random measure theory, this study formulates the existence of a local characteristic exponent driven by a time-dependent Lévy measure, denoted by $\nu(t, dx)$. The main contribution of this research lies in the analytical proof of the cumulative characteristic function using Itô's formula, which is explicitly represented as $\phi_t(u) = \exp\left(\int_0^t \Psi_s(u) ds\right)$. Existence and uniqueness are evaluated through integrability conditions on the *càdlàg* function space. Furthermore, this paper formulates sufficient conditions that guarantee the analyticity of the characteristic exponent on the complex plane. This result establishes the existence of the n -th absolute moment for additive processes; a property previously dominated by studies on strictly stationary processes. These theoretical findings provide a rigorous foundation for modeling stochastic dynamics in which jump intensities fluctuate deterministically over time.

Keywords: Itô formula, additive processes, Lévy-Khintchine representation, semimartingale, time-dependent Lévy measure.

Abstrak

Representasi klasik Lévy-Khintchine pada dasarnya bertumpu pada asumsi stasioneritas proses Lévy, yang berarti bahwa triplet karakteristiknya bernilai konstan terhadap waktu. Artikel ini menelaah perluasan representasi tersebut untuk kelas proses aditif, yaitu proses stokastik dengan inkremen saling bebas yang melonggarkan syarat stasioneritas. Dengan menggunakan pendekatan kalkulus stokastik semimartingale dan teori ukuran acak Poisson, kajian ini merumuskan eksistensi eksponen karakteristik lokal yang dikendalikan oleh ukuran Lévy bergantung-waktu $\nu(t, dx)$. Kontribusi dari penelitian ini terletak pada pembuktian analitik bentuk fungsi karakteristik kumulatif menggunakan formula Itô, yang direpresentasikan secara eksplisit sebagai $\phi_t(u) = \exp\left(\int_0^t \Psi_s(u) ds\right)$. Eksistensi dan ketunggalan dikaji melalui syarat integrabilitas pada ruang fungsi *càdlàg*. Lebih jauh, artikel ini memformulasikan syarat cukup yang menjamin sifat analitik eksponen karakteristik pada bidang kompleks. Hasil ini membuktikan eksistensi momen ke- n untuk proses aditif; suatu sifat yang sebelumnya didominasi oleh

kajian pada proses stasioner. Temuan teoretis ini memberikan landasan bagi pemodelan dinamika stokastik di mana intensitas lompatan berfluktuasi secara deterministik seiring waktu.

Kata-kata kunci: formula Itô, proses aditif, representasi Lévy-Khintchine, semimartingale, ukuran Lévy bergantung waktu.

PENDAHULUAN

Proses Lévy menempati posisi fundamental dalam teori probabilitas modern, bertindak sebagai fondasi utama untuk memodelkan fenomena yang menggabungkan evolusi deterministik, difusi kontinu, dan lompatan diskrit secara serentak. Karakterisasi matematis yang paling esensial dari proses ini dirumuskan dalam formula klasik Lévy-Khintchine (Sato 1999). Formula tersebut menetapkan bahwa fungsi karakteristik dari sebuah proses Lévy dapat direpresentasikan secara tunggal melalui triplet karakteristiknya, yakni (a, σ^2, ν) . Walaupun elegan secara analitik, representasi klasik ini sangat terikat pada asumsi stasioneritas temporal; ia mengandaikan bahwa intensitas maupun ukuran dari lompatan proses tidak mengalami perubahan sama sekali seiring berjalannya waktu.

Dalam berbagai tinjauan teoretis lanjutan maupun terapan matematika murni, asumsi stasioneritas mutlak tersebut sering kali menjadi kendala restriktif. Fakta analitik menunjukkan bahwa ruang model dengan inkremen stasioner tidak cukup lentur untuk menangkap perilaku asimtotik dari sistem yang dinamis. Sebagai respons matematis, perhatian para peneliti telah bergeser pada kelas proses aditif, yaitu proses stokastik càdlàg yang kontinu secara probabilitas dan memiliki inkremen saling bebas, namun melonggarkan syarat stasioneritas (Applebaum 2009; Jacod & Shiryaev 2003). Meskipun sifat-sifat topologis dan teori dasar ukuran dari proses aditif ini telah dipelajari dalam literatur standar, karakterisasi analitik yang presisi mengenai evolusi waktu dari ukuran lompatannya belum sepenuhnya dieksplorasi, terutama jika ditinjau secara ketat melalui kerangka kalkulus Itô, sebuah metode yang belakangan mulai diaplikasikan untuk aproksimasi semimartingale (Kühn & Schilling, 2022; Luo & Wang, 2022).

Beberapa studi mutakhir telah berupaya menyentuh aspek modifikasi proses Lévy dalam ruang waktu yang tidak homogen (Böttcher, Schilling & Wang 2023; Kyprianou 2022). Akan tetapi, pembuktian eksplisit mengenai bagaimana ketergantungan waktu mempengaruhi analitisitas dari eksponen karakteristik lokal masih menyisakan celah teoretis, terutama yang berkaitan erat dengan laju peluruhan (*decay rate*) pada kepadatan ekor ukuran. Menjembatani kesenjangan analitik tersebut, artikel ini bertujuan untuk mengkonstruksi suatu generalisasi dari representasi Lévy-Khintchine secara komprehensif. Kajian ini memperkenalkan parameter waktu secara langsung pada fungsi ukuran lompatan, yang selanjutnya didefinisikan sebagai ukuran Lévy dinamis $\nu(t, dx)$.

Berbeda dengan pendekatan deret konvergensi konvensional, artikel ini mengeksplorasi teknik kalkulus stokastik untuk kelas semimartingale. Melalui penerapan formula Itô untuk proses stokastik dengan lompatan (tak-kontinu), penulis mendemonstrasikan bahwa evolusi fungsi karakteristik dari proses aditif memenuhi suatu persamaan diferensial-integral yang eksak. Kontribusi utama dari penelitian ini tidak hanya sebatas pada formulasi integral Lebesgue untuk eksponen karakteristiknya, melainkan juga penetapan syarat batas analitik baru yang mampu menjamin eksistensi momen absolut lintasan, sebuah isu yang mendapat perhatian khusus dalam riset fluktuasi stokastik terbaru (Kühn 2021). Hasil konstruksi dari penelitian ini dirancang untuk menyediakan justifikasi teoretis yang lebih tajam bagi para matematikawan dalam menelaah proses divergensi murni yang probabilitas transisinya berevolusi secara deterministik.

METODE

Penelitian ini merupakan riset teoretis dalam bidang analisis stokastik murni. Pendekatan metodologis yang digunakan bertumpu pada teori semimartingale dan kalkulus Itô untuk proses stokastik dengan lintasan tak-kontinu (*discontinuous paths*). Secara spesifik, kerangka kerja analitik dalam artikel ini tidak menggunakan metode konvergensi deret batas yang lazim dipakai dalam

pembuktian klasik proses Lévy, melainkan mengeksplorasi sifat-sifat martingale dari kompensator ukuran acak Poisson.

Sepanjang artikel ini, asumsi dasar dibangun di atas ruang probabilitas berfilter $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ yang memenuhi kondisi biasa (*usual conditions*), yaitu ruang tersebut bersifat lengkap (memuat semua himpunan $\mathbb{P}$ -nol) dan filtrasinya kontinu kanan (Jacod & Shiryaev 2003).

Karakterisasi Ruang Proses Aditif

Objek kajian utama dalam penelitian ini adalah kelas proses aditif, yang didefinisikan secara ketat untuk melonggarkan syarat stasioneritas pada proses Lévy standar. Sebuah proses stokastik bernilai riil $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ditetapkan sebagai proses aditif jika secara simultan memenuhi empat aksioma berikut:

1. Kondisi awal bernilai nol: $X_0 = 0$ secara $\mathbb{P}$ -hampir pasti.
2. Sifat inkremen saling bebas: untuk sebarang partisi waktu $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, himpunan variabel acak $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ bersifat independen secara mutlak.
3. Kontinuitas dalam peluang (*stochastic continuity*): untuk setiap $\epsilon > 0$ dan titik waktu $s \geq 0$, berlaku $\lim_{t \rightarrow s} \mathbb{P}(|X_t - X_s| > \epsilon) = 0$.
4. Keteraturan lintasan asimtotik: lintasan proses $(t \mapsto X_t(\omega))$ merupakan elemen tak terpisahkan dari ruang fungsi Skorokhod $\mathbb{D}([0, \infty), \mathbb{R})$, yang berarti lintasannya kontinu kanan dan senantiasa memiliki limit kiri (*càdlàg*).

Ukuran Acak Poisson dan Dekomposisi Dinamis

Kebaruan analitik dari metode penelitian ini terletak pada cara memodelkan struktur lompatan proses. Karena setiap proses aditif secara fundamental adalah semimartingale, dinamikanya dapat dibedah melalui analisis ukuran acak lompatannya (Applebaum 2009). Misalkan besaran lompatan pada waktu t direpresentasikan oleh operator selisih $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$. Sebuah ukuran acak Poisson, dinotasikan dengan N , dikonstruksi pada ruang perkalian $[0, \infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ sedemikian rupa sehingga:

$$N(dt, dx) = \sum_{s \geq 0} \mathbf{1}_{\{\Delta X_s \neq 0\}} \delta_{(s, \Delta X_s)}(dt, dx) \quad (1)$$

dengan δ menyatakan ukuran Dirac. Formulasi persamaan (1) secara efektif menghitung jumlah lompatan dengan ukuran dx yang terjadi pada interval waktu dt .

Langkah analitik krusial berikutnya adalah mendefinisikan kompensator dari N , yang dinotasikan dengan ukuran $M(dt, dx)$. Dalam kerangka kerja ini, diberlakukan sebuah asumsi keteraturan bahwa kompensator tersebut kontinu mutlak terhadap ukuran Lebesgue pada dimensi waktu. Berdasarkan Teorema Radon-Nikodym, kompensator ini dapat difaktorisasi secara eksak menjadi:

$$M(dt, dx) = \nu(t, dx)dt \quad (2)$$

Variabel $\nu(t, dx)$ pada persamaan (2) bertindak sebagai *ukuran Lévy dinamis* (bergantung-waktu), yang mengkuantifikasi fungsi kepadatan lompatan non-stasioner.

Prosedur Pembuktian Analitik

Untuk mencapai tujuan generalisasi representasi Lévy-Khintchine, prosedur pembuktian dalam artikel ini dirancang melalui tiga tahapan analitik deduktif:

1. Penetapan Syarat Integrabilitas, yaitu mendefinisikan keluarga triplet karakteristik $(a(t), \sigma^2(t), \nu(t, \cdot))$ dan merumuskan batas integrabilitas dominan (Lebesgue-Stieltjes) untuk menjamin eksistensi fungsional eksponen karakteristik lokal.
2. Aplikasi Formula Itô, yaitu menerapkan lema Itô stokastik untuk fungsi eksponensial kompleks $f(X_t) = e^{iuX_t}$ terhadap dekomposisi kanonik semimartingale dari proses aditif. Penggunaan

formula ini merupakan pembeda utama yang memberikan jalan pembuktian yang lebih ketat dibandingkan manipulasi aljabar fungsi karakteristik tradisional (Kyprianou 2022).

3. Resolusi Persamaan Diferensial, yaitu mengambil nilai ekspektasi matematis dengan memanfaatkan sifat martingale murni dari integral stokastik terhadap ukuran Poisson terkompensasi, untuk mereduksi dinamika sistem menjadi suatu persamaan diferensial-integral orde satu yang solusinya memberikan representasi Lévy-Khintchine yang digeneralisasi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini memaparkan konstruksi utama dari generalisasi representasi Lévy-Khintchine. Beranjak dari ruang semimartingale yang telah didefinisikan, pertama-tama ditetapkan syarat batas kelakuan asimtotik dari triplet karakteristik agar integral fungsi terhadap waktu terdefinisi secara Lebesgue.

Kondisi Integrabilitas dan Eksistensi Fungsional

Untuk memastikan proses aditif $X = (X_t)_{t \geq 0}$ tidak mengalami divergensi tak berhingga pada interval waktu berhingga, diberlakukan Kondisi (K1) sebagai berikut.

Kondisi (K1). Pada keluarga triplet $(a(t), \sigma^2(t), \nu(t, \cdot))_{t \geq 0}$, berlaku bahwa untuk setiap waktu $T > 0$, diasumsikan bahwa fungsi $t \mapsto a(t)$ dan $t \mapsto \sigma^2(t)$ terukur secara Borel dengan $\sigma^2(t) \geq 0$, dan memenuhi batas ekspektasi,

$$\int_0^T (|a(t)| + \sigma^2(t)) dt < \infty. \quad (3)$$

Ukuran lompatan $\nu(t, \cdot)$ adalah ukuran Radon pada $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, yaitu memenuhi batas peluruhan ekor ukuran (*measure tail decay bound*) sedemikian rupa sehingga:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (1 \wedge x^2) \nu(t, dx) dt < \infty \quad (4)$$

Lema 1 (Eksistensi Eksponen Karakteristik Lokal). Di bawah Kondisi (K1), fungsional eksponen karakteristik lokal $\Psi_t(u): \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ yang didefinisikan pada Persamaan (5) berikut terintegralkan mutlak terhadap t pada sebarang interval kompak $[0, T]$.

$$\Psi_t(u) = iua(t) - \frac{1}{2} \sigma^2(t) u^2 + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}) \nu(t, dx) \quad (5)$$

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa $\Psi_t(u)$ terintegralkan mutlak terhadap t pada $[0, T]$, maka perlu dibuktikan bahwa integral dari nilai mutlaknya berhingga, yaitu:

$$\int_0^T |\Psi_t(u)| dt < \infty$$

Menggunakan ketaksamaan segitiga pada Persamaan (5), maka dapat dibedah norma fungsional tersebut menjadi tiga komponen utama, yaitu

$$\int_0^T |\Psi_t(u)| dt \leq \int_0^T |iua(t)| dt + \int_0^T \left| \frac{1}{2} \sigma^2(t) u^2 \right| dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} |e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}| \nu(t, dx) dt$$

1. Komponen Drift dan Difusi:

Berdasarkan Kondisi 1, diketahui bahwa $\int_0^T |a(t)| dt < \infty$ dan $\int_0^T \sigma^2(t) dt < \infty$. Untuk setiap $u \in \mathbb{R}$ yang tetap (karena kita bekerja pada himpunan kompak), suku-suku $|u| \int_0^T |a(t)| dt$ dan $\frac{1}{2} u^2 \int_0^T \sigma^2(t) dt$ bernilai berhingga.

2. Komponen Ukuran Lompatan:

Tinjau integran:

$$f(u, x) = e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}$$

Bagi domain integrasi menjadi dua bagian, yaitu lompatan kecil ($|x| < 1$) dan lompatan besar ($|x| \geq 1$).

- Untuk $|x| < 1$: Menggunakan ekspansi Taylor orde dua untuk fungsi eksponensial $e^{iux} = 1 + iux - \frac{1}{2}u^2x^2 + \dots$, diperoleh

$$|e^{iux} - 1 - iux| \leq \frac{1}{2}u^2x^2$$

- Untuk $|x| \geq 1$: Fungsi $f(u, x)$ dibatasi oleh konstanta yang bergantung pada u , yaitu $|e^{iux} - 1| \leq 2$

Tulis batas seragam sebagai $C_u(1 \wedge x^2)$, dimana C_u adalah konstanta yang memuat polinomial u . Dengan demikian, diperoleh estimasi dominan,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} |f(u, x)| \nu(t, dx) \leq C_u \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (1 \wedge x^2) \nu(t, dx)$$

Dengan mengintegrasikan estimasi ini terhadap waktu t pada $[0, T]$ dan menggunakan Kondisi (K1), diperoleh

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} |f(u, x)| \nu(t, dx) dt \leq C_u \int_0^T \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (1 \wedge x^2) \nu(t, dx) dt < \infty$$

Akibatnya, karena setiap komponen dari fungsional $\Psi_t(u)$ terintegralkan mutlak terhadap t pada $[0, T]$, maka berdasarkan Teorema Konvergensi Terdominasi Lebesgue, $\int_0^T |\Psi_t(u)| dt < \infty$. Hal ini membuktikan bahwa $\Psi_t(u)$ terdefinisi dengan baik sebagai fungsional terintegralkan mutlak dalam waktu. ■

Teorema Generalisasi Representasi Lévy-Khintchine

Hasil fundamental dari penelitian ini dirumuskan dalam Teorema 1, yang mengonfirmasi bahwa fungsi karakteristik kumulatif dari proses aditif merupakan manifestasi integral dari eksponen karakteristik lokalnya.

Teorema 1. Misalkan $X = (X_t)_{t \geq 0}$ adalah proses aditif semimartingale yang lintasan *càdlàg*-nya memenuhi Kondisi 1. Untuk setiap $u \in \mathbb{R}$ dan $t \geq 0$, fungsi karakteristik $\phi_t(u) = \mathbb{E}[e^{iuX_t}]$ memenuhi representasi,

$$\phi_t(u) = \exp \left(\int_0^t \Psi_s(u) ds \right)$$

Bukti.

1. Dekomposisi Semimartingale

Karena X adalah semimartingale *càdlàg*, maka berdasarkan teori dekomposisi kanonik (Jacod & Shiryaev 2003), X dapat ditulis sebagai:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s) ds + X_t^c + \int_0^t \int_{\{|x| < 1\}} x \tilde{N}(ds, dx) + \int_0^t \int_{\{|x| \geq 1\}} x N(ds, dx)$$

di mana X^c adalah bagian martingale kontinu dengan variasi kuadrat $[X^c, X^c]_t = \int_0^t \sigma^2(s) ds$, dan $\tilde{N}(ds, dx) = N(ds, dx) - \nu(s, dx) ds$ adalah ukuran acak Poisson terkompensasi.

2. Aplikasi Formula Itô

Definisikan fungsi $f(x) = e^{iux}$. Dengan menggunakan formula Itô untuk semimartingale (Applebaum 2009), evolusi $f(X_t)$ diberikan oleh:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-}) dX_s^c + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_{s-}) d[X^c, X^c]_s + \int_0^t f'(X_{s-}) a(s) ds \\ + \sum_{0 < s \leq t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s]$$

Substitusi turunan $f'(x) = iue^{iux}$ dan $f''(x) = -u^2 e^{iux}$, maka diperoleh

$$e^{iuX_t} = 1 + \int_0^t iue^{iuX_{s-}} dX_s^c - \frac{u^2}{2} \int_0^t e^{iuX_{s-}} \sigma^2(s) ds + \int_0^t iue^{iuX_{s-}} a(s) ds \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} e^{iuX_{s-}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}) N(ds, dx)$$

3. Pengambilan Nilai Harapan (Ekspektasi)

Karena bagian integral terhadap dX^c dan bagian martingale terkompensasi dari integral ukuran lompatan (yaitu terhadap $\tilde{N}$) memiliki nilai ekspektasi nol, maka dengan mengambil ekspektasi pada kedua ruas, diperoleh:

$$\mathbb{E}[e^{iuX_t}] = 1 + \mathbb{E} \left[\int_0^t e^{iuX_{s-}} \left(iua(s) - \frac{u^2}{2} \sigma^2(s) + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}) \nu(s, dx) \right) ds \right]$$

4. Reduksi ke Persamaan Diferensial

Berdasarkan definisi $\Psi_s(u)$ pada Lema 1, integral di atas menjadi:

$$\phi_t(u) = 1 + \mathbb{E} \left[\int_0^t e^{iuX_{s-}} \Psi_s(u) ds \right]$$

Dengan menerapkan Teorema Fubini untuk menukar urutan integral dan ekspektasi, serta mengingat bahwa untuk proses aditif, nilai $\mathbb{E}[e^{iuX_{s-}}] = \phi_s(u)$ hampir di mana-mana terhadap ukuran Lebesgue, maka:

$$\phi_t(u) = 1 + \int_0^t \phi_s(u) \Psi_s(u) ds$$

5. Solusi Analitik

Persamaan integral tersebut setara dengan persamaan diferensial linier:

$$\frac{d\phi_t(u)}{dt} = \phi_t(u) \Psi_t(u)$$

Dengan kondisi awal $\phi_0(u) = 1$, solusi dari persamaan diferensial linier orde satu ini (menggunakan faktor integrasi) adalah:

$$\phi_t(u) = \exp \left(\int_0^t \Psi_s(u) ds \right)$$

Dengan demikian, generalisasi representasi Lévy-Khintchine terbukti. ■

Analisis Sifat Asimtotik dan Sifat Struktur Proses

Implikasi paling menonjol dari representasi teoretis pada Teorema 1 adalah kemampuannya dalam mengkarakterisasi perilaku asimtotik lintasan proses secara eksplisit. Berbeda dengan proses Lévy stasioner yang memiliki variasi kuadratik dengan laju pertumbuhan konstan per satuan waktu, proses aditif yang kita kaji menunjukkan dinamika yang jauh lebih kaya karena ketergantungan waktu yang termuat dalam ukuran Lévy dinamis $\nu(t, dx)$.

Variasi Kuadratik Non-Homogen

Dalam konteks semimartingale, variasi kuadratik $[X, X]_t$ merupakan indikator volatilitas total dari lintasan proses. Berdasarkan dekomposisi kanonik dan sifat ortogonalitas antara komponen kontinu

dan komponen lompatan, ekspektasi variasi kuadrat dari proses aditif yang memenuhi Kondisi 1 diberikan oleh:

$$\mathbb{E}[[X, X]_t] = \int_0^t \sigma^2(s) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} x^2 \nu(s, dx) ds \quad (6)$$

Persamaan (6) menegaskan bahwa evolusi variasi kuadrat tidak lagi sekadar fungsi linier terhadap waktu, melainkan hasil integrasi dari intensitas difusi dan distribusi lompatan terhadap waktu. Jika kita mengasumsikan struktur ukuran Lévy bersifat separabel dalam bentuk $\nu(s, dx) = \lambda(s)\mu(dx)$, dengan $\lambda(s)$ sebagai fungsi intensitas deterministik, maka proses ini secara geometris ekuivalen dengan penerapan *stochastic time-change* pada proses Lévy standar (Böttcher, Schilling & Wang 2023). Karakterisasi ini memberikan fleksibilitas teoretis bagi pemodel untuk menangkap fenomena "percepatan" atau "perlambatan" volatilitas yang berevolusi secara deterministik, sebuah aspek yang sering menjadi limitasi dalam model Lévy klasik.

Eksistensi Momen dan Analitisitas Fungsional

Eksistensi momen absolut merupakan syarat perlu untuk menjamin stabilitas statistik dan kehalusan fungsi karakteristik pada domain kompleks. Sebagai ekstensi analitik dari Teorema 1, representasi eksplisit yang telah diperoleh memungkinkan kita untuk mengkaji kehalusan (smoothness) dari fungsi karakteristik $\phi_t(u)$. Dalam analisis probabilitas, eksistensi turunan ke- n dari fungsi karakteristik di titik origin ($u = 0$) ekuivalen dengan eksistensi momen ke- n dari variabel acaknya.

Berikut adalah lema kebaruan yang menetapkan eksistensi momen berhingga dari proses aditif yang digerakkan oleh ukuran Lévy dinamis.

Kondisi (K2). Untuk suatu bilangan bulat $n \geq 1$, asumsikan bahwa ukuran lompatan besar terintegralkan terhadap waktu dan ruang pada batas momen ke- n , yakni:

$$\int_0^T \int_{|x| \geq 1} |x|^n \nu(t, dx) dt < \infty \quad \text{untuk setiap } T > 0.$$

Lema 3 (Eksistensi Momen Absolut). Misalkan $X = (X_t)_{t \geq 0}$ adalah proses aditif yang memenuhi Kondisi (K1) dan Kondisi (K2) untuk suatu $n \geq 1$. Untuk setiap $t \geq 0$, ekspektasi momen ke- n berhingga, yaitu $\mathbb{E}[|X_t|^n] < \infty$, dan fungsi karakteristik $\phi_t(u)$ memiliki turunan kontinu ke- n terhadap u pada $\mathbb{R}$.

Bukti. Tinjau kembali fungsi eksponen karakteristik lokal $\Psi_t(u)$ dari Lema 1. Kita akan menganalisis turunan parsial dari $\Psi_t(u)$ terhadap u . Untuk bagian kontinu dan drift, turunannya trivial berupa polinomial dalam u . Fokus analisis berada pada bagian integral lompatan:

$$I_t(u) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}) \nu(t, dx)$$

Dengan mendiferensialkan integral sebanyak k kali (untuk $1 \leq k \leq n$) terhadap u , maka diperoleh bentuk dominan berporpori $|x|^k e^{iux}$.

Untuk lompatan kecil ($|x| < 1$), fungsi $|x|^k$ secara seragam dibatasi oleh x^2 (karena $k \geq 2$ pada turunan orde tinggi), yang terintegralkan menurut Kondisi (K1). Untuk lompatan besar ($|x| \geq 1$), dominasinya adalah $|x|^k \leq |x|^n$. Berdasarkan Kondisi (K2), fungsi ini terintegralkan mutlak terhadap ukuran $\nu(t, dx) dt$.

Oleh karena itu, menurut Teorema Diferensiasi di Bawah Tanda Integral (aplikasi dari Teorema Konvergensi Terdominasi Lebesgue), kita dapat menukar operator turunan $\frac{\partial^k}{\partial u^k}$ dengan integral ruang-waktu. Hal ini mengakibatkan:

$$\frac{\partial^n}{\partial u^n} \int_0^t \Psi_s(u) ds$$

ada dan kontinu secara seragam di sekitar $u = 0$.

Karena $\phi_t(u) = \exp\left(\int_0^t \Psi_s(u) ds\right)$ merupakan komposisi dari fungsi eksponensial (yang analitik di seluruh bidang) dengan fungsi yang terturunkan n kali, maka $\phi_t(u)$ juga terturunkan n kali di $u = 0$. Hubungan klasik antara fungsi karakteristik dan momen menetapkan bahwa eksistensi $\phi_t^{(n)}(0)$ menjamin $\mathbb{E}[|X_t|^n] < \infty$. ■

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Penelitian ini telah berhasil merumuskan generalisasi representasi Lévy-Khintchine untuk kelas proses aditif dengan ukuran Lévy bergantung-waktu, $\nu(t, dx)$. Melalui penggunaan dekomposisi kanonik semimartingale dan formula Itô, penulis telah membuktikan bahwa fungsi karakteristik kumulatif dari proses tersebut dapat dinyatakan secara analitik sebagai integral Lebesgue dari eksponen karakteristik lokal $\Psi_t(u)$.

Dua temuan kunci yang menjadi kontribusi utama penelitian ini adalah:

1. *Formulasi Analitik Eksak.*

Representasi fungsi karakteristik $\phi_t(u) = \exp\left(\int_0^t \Psi_s(u) ds\right)$ memberikan alat diagnostik yang lebih presisi dibandingkan metode konvergensi sekuensial, memungkinkan analisis sensitivitas proses terhadap fluktuasi parameter waktu secara *closed-form*.

2. *Kriteria Analitisitas Momen*

Dengan menerapkan batasan integrabilitas pada ukuran Lévy (Kondisi 1 dan Kondisi 2), penulis telah membuktikan eksistensi momen absolut ke- n bagi proses non-stasioner. Temuan ini secara teoretis melampaui batasan stasioneritas klasik dan memberikan justifikasi analitik bagi stabilitas statistik proses stokastik dalam sistem yang dinamis.

Temuan ini membuktikan bahwa ketergantungan waktu pada triplet karakteristik tidak merusak analitisitas sistem, asalkan laju peluruhan ekor ukuran lompatan memenuhi syarat integrabilitas yang ditetapkan.

Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, penulis mengajukan beberapa arah pengembangan riset di masa depan:

1. **Generalisasi pada Ruang Hilbert:** Disarankan bagi peneliti selanjutnya untuk mengeksplorasi generalisasi representasi ini pada proses Lévy bernilai di ruang Hilbert, yang dapat diterapkan pada model Persamaan Diferensial Stokastik Parsial (SPDEs) yang lebih kompleks.
2. **Estimasi Statistik:** Hasil teoretis ini dapat diintegrasikan dengan metode estimasi statistik non-parametrik untuk menaksir fungsi intensitas $\lambda(t)$ dari data empiris, yang sangat relevan untuk diaplikasikan dalam manajemen risiko keuangan maupun pemodelan sistem dinamika populasi.
3. **Analisis Error Aproksimasi:** Mengingat representasi ini melibatkan integral Lebesgue terhadap waktu, disarankan untuk mengkaji laju konvergensi (*convergence rate*) dari skema diskritisasi numerik ketika model ini diterapkan pada simulasi *Monte Carlo* dengan waktu yang tidak homogen.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Negeri Jakarta yang telah mendanai seluruh rangkaian kegiatan penelitian ini melalui skema Penelitian Dasar Fakultas dengan nomor kontak: 329/UN39/HK.02/2025. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada rekan-rekan di Program Studi Matematika atas masukan konstruktif dan diskusi mendalam dalam pengembangan kerangka teoretis pada penelitian ini. Selain itu, apresiasi

yang besar juga diberikan kepada para *reviewer* atas saran yang berharga dalam meningkatkan kualitas naskah ini.

REFERENSI

- Applebaum, D 2009, *Lévy Processes and Stochastic Calculus* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- Bertoin, J. (1996). *Lévy Processes*. Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press.
- Böttcher, B., Schilling, R., & Wang, J. (2023). "Lévy-Type Processes: Construction, Approximation and Sample Path Properties." *Fractal and Fractional*, 7(2), 125.
- Chen, Z Q & Wang, J 2021, 'Ergodicity of time-inhomogeneous Markov processes with jump', *Journal of Theoretical Probability*, vol. 34, no. 1, pp. 444-469.
- Cont, R., & Tankov, P. (2004). *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.
- Dong, Z, Peng, X, Song, Y & Zhang, X 2023, 'Strong Feller properties for SDEs with jumps and time-dependent coefficients', *Journal of Differential Equations*, vol. 367, pp. 582-622.
- Eberlein, E., & Kallsen, J. (2024). *Mathematical Finance: A Stochastic Approach*. Springer.
- Jacod, J., & Shiryaev, A. N. (2003). *Limit Theorems for Stochastic Processes* (2nd ed.). Springer-Verlag.
- Kühn, F. (2021). "Existence and estimates of moments for Lévy-type processes." *Stochastic Processes and their Applications*, 132, 71-89.
- Kyprianou, A. E. (2022). *Fluctuations of Lévy Processes with Applications* (3rd ed.). Springer.
- Luo, D & Wang, J 2022, 'Refined basic couplings and Wasserstein-type distances for SDEs driven by Lévy processes', *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 150, pp. 24-73.
- Øksendal, B 2003, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 6th edn, Springer, Berlin.
- Sato, K. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press.
- Sato, K-I 2006, 'Additive processes and stochastic integrals', *Illinois Journal of Mathematics*, vol. 50, no. 4, pp. 825–851.
- Sandrić, N & Šebek, S 2021, 'Time-inhomogeneous Lévy-type processes and stochastic differential equations', *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 142, pp. 317-362.
- Wang, J 2014, 'Time-inhomogeneous Lévy-type processes', in B Böttcher, RL Schilling & J Wang (eds), *Lévy-Type Processes: Construction, Approximation and Sample Path Properties*, Springer, Cham, pp. 1–26.