

DOI: doi.org/10.21009/0305020414

PEMODELAN KEDEPAN GEOLISTRIK RESISTIVITAS MENGUNAKAN METODE BEDA HINGGA (KASUS 2D: MODEL LAPISAN YANG HOMOGEN)

Fitria Dwi Andriani^{a)}, Elza Anisa Suwandi^{b)}, Hafshah Suria Dhani, Firmansyah, Selly Feranie

Departemen Fisika FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia, Jl. Dr. Setiabudi No 299, Bandung 40154

Email: ^{a)}fdwiandriani@gmail.com, ^{b)}elzaanisas@gmail.com

Abstrak

Dalam eksplorasi geofisika, pemodelan merupakan suatu cara untuk menafsirkan distribusi respon bumi yang terukur dari suatu kondisi geologi bawah permukaan tertentu. Telah dilakukan pemodelan kedepan (forward modelling) geolistrik resistivitas untuk kasus 2D dengan menerapkan metode beda hingga (finite difference method) menggunakan software Matlab untuk menyelesaikan suatu persamaan differensial sistem, dalam kasus ini yaitu persamaan Poisson. Penyelesaian solusi persamaan differensial tersebut dilakukan dengan mendiskritisasi persamaan menggunakan central finite difference yang didekati dengan ekspansi deret Taylor sehingga menghasilkan suatu persamaan linier $Ax = B$, dimana A adalah sparse matrix, x adalah potensial listrik disetiap titik (grid), dan B adalah vektor matriks arus listrik. Model lapisan yang digunakan pada penelitian ini adalah lapisan homogen yang berukuran 20x20 grid. Hasil perhitungan yang diperoleh menunjukkan bahwa respon model (nilai resistivitas) di permukaan sangat bergantung pada syarat batas yang digunakan dan juga sensitif terhadap perubahan jarak spasi elektroda (dalam kasus ini menggunakan Konfigurasi Wenner). Program ini mampu memberikan hasil yang mendekati dengan nilai model awal ketika pengukuran yang dilakukan di permukaan tidak mendekati kedua sisi tepi model grid dan jarak spasi elektroda dalam rentang 1 sampai 3 piksel (grid).

Kata-kata Kunci: metode beda hingga, model homogen, pemodelan kedepan resistivitas 2-D, persamaan poisson

Abstract

In exploration geophysics, modeling is a way to interpreting the distribution of the earth response of a subsurface geological conditions specific. Resistivity geoelectric forward modeling for 2D case has been done by applying the finite difference method using Matlab software to solve a differential equations system, in this case it is Poisson equation. The solution of differential equations is done by discretization it using central finite difference approximated by Taylor series expansion resulting a linear equations $Ax = B$, where A is a sparse matrix, x is the electric potential at each grid, and B is the electric current matrix vector. Layer model used in this study is a 20x20 grid homogeneous layer. Calculation results show that the model response (resistivity value) on the surface is dependent on the boundary conditions and sensitive to electrode spacing changes (in this case using the Configuration Wenner). This program is able to provide results approaching the initial model values when surface measurements do not approach both the edge of the grid model side and electrode spacing in the range of 1 to 3 pixels (grid).

Keywords: finite difference method, homogen modelling, resistivity forward modelling 2D.

1. Pendahuluan

Dalam geofisika, pengukuran data di permukaan bumi dilakukan untuk memperkirakan kondisi bawah permukaan. Data pengamatan merupakan respon dari struktur atau formasi geologi bawah permukaan [2]. Selanjutnya, interpretasi data geofisika perlu dilakukan untuk mengetahui gambaran distribusi respon fisis bawah permukaan (misalnya: distribusi nilai resistivitas). Pengukuran data di

permukaan bumi umumnya dilakukan menggunakan geolistrik. Salah satu metoda geolistrik yang sesuai yaitu metode geolistrik resistivitas. Data resistivitas yang diperoleh dari pengukuran merupakan data resistivitas semu. Data resistivitas semu umumnya ditampilkan sebagai peta kontur berwarna dan diinterpretasi secara kualitatif. Namun, karena struktur geologi bawah permukaan bersifat non-homogen, maka diperlukannya solusi analitik untuk merubah resistivitas semu menjadi resistivitas

sebenarnya [4]. Akan tetapi, solusi analitik untuk struktur geologi yang kompleks sangat sulit diperoleh sehingga diperlukannya perhitungan secara numerik. Telah dilakukan beberapa teknik pemodelan kedepan data resistivitas dalam 2-D dan 3-D secara numerik oleh peneliti sebelumnya adalah *finite difference method* [1,4,5] dan *finite element method* [7,8]. Pemodelan kedepan menyatakan proses perhitungan “data” yang secara teoritis akan teramati di permukaan bumi jika diketahui harga parameter model bawah-permukaan tertentu.[2]

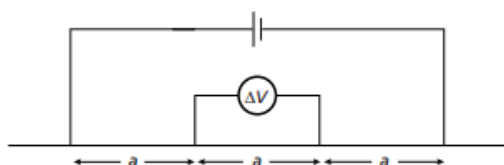
Dalam penelitian ini, secara keseluruhan merupakan variasi dari penelitian sebelumnya, dimana penelitian ini bersifat sebagai pembelajaran untuk mengetahui bagaimana proses pemodelan kedepan 2-D lapisan homogen menggunakan metode beda hingga. Metode tersebut digunakan untuk menentukan parameter yang mempengaruhi perbedaan parameter model awal dengan parameter respon model. Hasil resistivitas model dapat digunakan sebagai gambaran awal untuk disesuaikan dengan respon resistivitas model. Agar mendapat hasil yang tepat, kita harus mengurangi *error* dari hasil respon resistivitas model dengan memvariasikan spasi elektroda menjadi lebih kecil dan posisi elektroda tidak berada pada kedua sisi tepi model grid (menghindari efek syarat batas).

2. Persamaan Geolistrik Resistivitas

Salah satu metoda geofisika yang umum dan mudah digunakan adalah metoda geolistrik resistivitas/tahanan jenis. Metode geolistrik tahanan jenis merupakan salah satu metode geofisika yang digunakan untuk mengetahui kondisi geologi bawah permukaan dengan memanfaatkan sifat aliran listrik di dalam permukaan. Beberapa jenis konfigurasi elektroda yang biasa digunakan dalam metode geolistrik, diantaranya adalah konfigurasi Wenner, konfigurasi Schlumberger dan konfigurasi dipol-dipol.

Pada pemodelan yang dilakukan, konfigurasi elektroda yang digunakan adalah Konfigurasi Wenner, dimana resistivitas semu untuk konfigurasi wenner adalah[3,6]:

$$\rho_a = 2\pi a \frac{\Delta V}{I} \quad (1)$$



Gambar 1. Konfigurasi Wenner

Dengan ρ_a merupakan resistivitas semu, $2\pi a$ merupakan faktor geometri dari konfigurasi elektroda

yang digunakan, ΔV merupakan beda potensial yang terukur, dan I merupakan kuat arus listrik yang diinjeksikan.

Hubungan rapat arus dengan Medan listrik berdasarkan hukum Ohm dapat dituliskan sebagai:

$$J = \sigma E \quad (2)$$

dengan σ merupakan konduktivitas dan medan listrik stasioner dapat dituliskan sebagai gradien dari potensial listrik V :

$$E = -\Delta V \quad (3)$$

sehingga untuk memperoleh potensial listrik maka, diasumsikan pengukuran geolistrik resistivitas di permukaan bumi berlaku konservasi muatan, maka diperoleh persamaan kontinuitas:

$$\Delta \vec{J} = Q \quad (4)$$

Q merupakan sumber arus yang didefinisikan hanya terdapat pada lokasi injeksi saja $Q = I\delta(x - x_s)(y - y_s)(z - z_s)$.

Dengan mensubstitusi persamaan 2 dan persamaan 3 dengan mengasumsikan tidak ada perubahan konduktivitas diarah y maka diperoleh persamaan 4 menjadi:

$$-\nabla \cdot (\sigma(x, z)\nabla V) = I\delta(x - x_s)(y - y_s)(z - z_s) \quad (5)$$

Dengan menggunakan hubungan vektor[3]:

$$\nabla \sigma \nabla V = \frac{1}{2}[-\sigma(x, z)\nabla^2 V + \nabla^2(\sigma V) - V\nabla^2 \sigma] \quad (6)$$

Sehingga diperoleh persamaan diferensial geolistrik menjadi [3]:

$$\sigma(x, z)\nabla^2 V(x, y, z) + \nabla^2(\sigma(x, z)V(x, y, z)) - V(x, y, z)\nabla^2 \sigma(x, z) = -2I\delta(x_s)\delta(y_s)\delta(z_s) \quad (7)$$

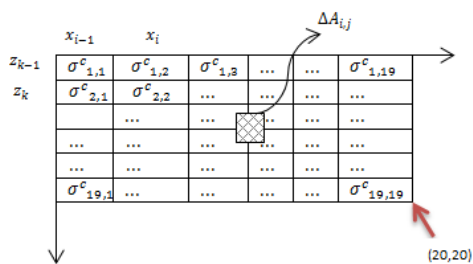
Persamaan 7 merupakan persamaan diferensial potensial listrik untuk kasus secara umum biasanya merupakan kasus 3D. Dengan menggunakan Transformasi Fourier, persamaan kasus 3-D dapat diubah menjadi 2-D dengan mengansumsikan bahwa potensial ke arah y adalah konstan, sehingga untuk kasus 2-D, bentuk persamaan 7 menjadi [3]:

$$\sigma \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial z} + k_y^2 \sigma(x, z) = \frac{I}{2} \delta(x - x_s)(z - z_s) \quad (8)$$

dimana k_y merupakan bilangan gelombang spasial dalam arah sumbu- y , I merupakan arus listrik, dan $\delta(x - x_s)(z - z_s)$ adalah posisi elektroda yang menginjeksi arus listrik. Persamaan 8 merupakan persamaan diferensial potensial listrik untuk kasus 2D. Untuk kasus homogen tidak ada perubahan potensial sehingga Persamaan diferensial ini merupakan persamaan diferensial poisson yaitu:

$$\nabla^2 V \neq 0 \quad (9)$$

Untuk memperoleh nilai potensial yang akurat maka dilakukan pendiskritisasian pada persamaan 8 [1]. Pada gambar 2 menunjukkan struktur 2-D grid dengan jarak antar grid berbeda.



Gambar 2. Model grid berukuran 20 x 20 grid beserta nilai konduktivitas tiap sel.

Dimana $\sigma_{i,j}^c$ merupakan konduktivitas sel (tiap kotak) yang nantinya akan berkontribusi pada perhitungan konduktivitas masing-masing grid. Model grid berukuran 20 x 20.

3. Metode Penelitian

3.1 Metode Beda Hingga (*finite difference method*)

Persamaan diferensial geolistrik yang telah diperoleh dari persamaan 8, dapat diperoleh solusinya dengan menerapkan Metode Beda Hingga (*Finite Diffrence Method*). Metode ini mengubah persamaan diferensial potensial listrik menjadi persamaan linier yaitu:

$$A\vec{x} = \vec{B} \quad (10)$$

Dengan mengekspansi deret Taylor: $x(t + \Delta t) =$

$\Delta x^n \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} \frac{1}{n!}$ dengan $n = 0 - \infty$ sehingga, untuk beda maju dan beda mundur persamaan yang diperoleh yaitu;

Beda maju =

$$V_{i+1,k} = V_{i,k} + \Delta x_i \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{i,k} + \frac{\Delta x_i^2}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{i,k} + \dots \quad (11)$$

Beda mundur =

$$V_{i-1,k} = V_{i,k} - \Delta x_{i-1} \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{i,k} + \frac{\Delta x_{i-1}^2}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{i,k} + \dots \quad (12)$$

ungkapan turunan pertama dari potensial diperoleh dari selisih kedua persamaan diatas

$$\frac{\partial V(i,j)}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x} V(i+\Delta x,j) - V(i-\Delta x,j) \quad (13)$$

dan ungkapan turunan kedua dari potensial diperoleh dari penjumlahan kedua persamaan diatas:

$$\frac{\partial^2 V(i,j)}{\partial x^2} = \frac{V(i+\Delta x,j) - V(i-\Delta x,j) - 2V(i,j)}{\Delta x^2} \quad (14)$$

dengan model grid berukuran 20 x 20 seperti yang terlihat pada Gambar 2 [1]. Hasil pendiskritisasian tersebut menghasilkan persamaan linier potensial tiap grid sebagai berikut:

$$C1_{i,k} V_{i-1,k} + C2V_{i+1,k} + C3_{i,k} V_{i,k-1} + C4_{i,k} V_{i,k+1} - C0_{i,k} V_{i,k} = -Q \quad (15)$$

dimana C1=kiri, C2=kanan, C3=atas, C4=bawah, dan C0=di posisi grid yang sedang ditinjau. Dengan nilai masing-masing C adalah[1]:

$$C1_{i,k} = \frac{2\sigma_{i,k} \frac{\partial \sigma_{i,k}}{\partial x} \Delta x_i}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)}; \quad (16)$$

$$C2_{i,k} = \frac{2\sigma_{i,k} + \frac{\partial \sigma_{i,k}}{\partial x} \Delta x_{i-1}}{\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)}; \quad (17)$$

$$C3_{i,k} = \frac{2\sigma_{i,k} - \frac{\partial \sigma_{i,k}}{\partial z} \Delta z_i}{\Delta z_{i-1}(\Delta z_{i-1} + \Delta z_i)}; \quad (18)$$

$$C4_{i,k} = \frac{2\sigma_{i,k} + \frac{\partial \sigma_{i,k}}{\partial z} \Delta z_{i-1}}{\Delta z_i(\Delta z_{i-1} + \Delta z_i)}; \quad (19)$$

dan

$$C0_{i,k} = -\sum_{l=1}^4 C l_{i,k} \quad (20)$$

Untuk kasus homogen dan jarak antar grid sama yaitu senilai 1 maka nilai setiap konstanta menjadi:

$$C1_{i,k} = C2_{i,k} = C3_{i,k} = C4_{i,k} = \sigma_{i,k} \quad (21)$$

Sehingga Persamaan diferensial geolistrik menjadi:

$$\sigma [V_{(i+1,j)} + V_{(i-1,j)} + V_{(i,j+1)} + V_{(i,j-1)} - 4V_{(i,j)}] = I \quad (22)$$

Persamaan tersebut merupakan bentuk lengkap dari persamaan 8 dengan Bentuk lengkap matriks koefisien A, vektor potensial \vec{x} , dan vektor sumber \vec{B} yaitu:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} V_{1,1} \\ V_{1,2} \\ V_{1,3} \\ V_{1,4} \\ V_{1,5} \\ V_{1,6} \\ V_{1,7} \\ \vdots \\ V_{200,200} \end{bmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dimana merupakan matriks } 400 \times 1$$

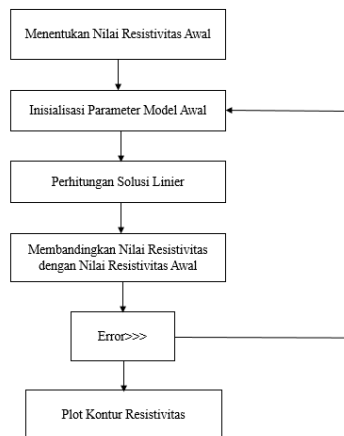
Matriks diatas merupakan contoh ketika menginjeksikan arus melalui elektroda di koordinat (1,3) dan (1,6).

$$A = \begin{pmatrix} C_{0,1} & C_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{4,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1,2} & C_{0,2} & C_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{4,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{1,3} & C_{0,3} & C_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{4,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & C_{1,118} & C_{0,18} & C_{2,18} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{4,148} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1,19} & C_{0,19} & C_{2,19} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{4,149} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1,20} & C_{0,20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{4,150} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{3,2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{0,2,1} & C_{2,2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{3,2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1,2,2} & C_{0,2,2} & C_{2,2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{3,2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1,2,3} & C_{0,2,3} & C_{2,2,3} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3,2,18} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1,2,18} & C_{0,2,18} & C_{2,2,18} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3,2,19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1,2,19} & C_{0,2,19} & C_{2,2,19} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3,2,20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1,2,20} & C_{0,2,20} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & C_{4,49,50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3,50,50} & C_{0,20,1} & C_{2,20,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & C_{1,20,2} & C_{0,20,2} & C_{2,20,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & 0 & C_{1,20,3} & C_{0,20,3} & C_{2,20,3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & \dots & \dots & \dots & C_{1,20,18} & C_{0,20,18} & C_{2,20,18} & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & \dots & \dots & \dots & 0 & C_{1,20,49} & C_{0,20,19} & C_{2,20,19} \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & C_{1,20,20} & C_{0,20,20} \end{pmatrix}$$

Sehingga, solusi potensial di tiap grid dapat diperoleh dengan menggunakan operasi matriks biasa yaitu $\vec{x} = A^{-1}\vec{B}$

3.2. Model Lapisan

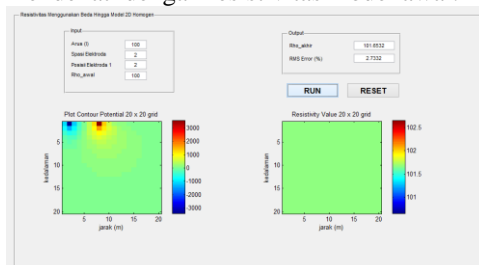
Model lapisan yang digunakan pada penelitian ini adalah lapisan yang homogen dan dua lapisan horizontal yang masing-masing berukuran 20 x 20 grid dan jarak antar grid sama yaitu 1 cm. Jenis pengukuran di permukaan menggunakan konfigurasi Wenner. Dengan variasi spasi elektroda dalam rentang 1 – 5 grid. Adapun diagram alir dari program ini adalah:



Gambar 3. Diagram alir program

4. Hasil Dan Pembahasan

Hasil perhitungan *forward modeling* untuk jenis lapisan homogen dengan input parameter tertentu seperti yang ditunjukkan pada gambar 3, diperoleh distribusi nilai resistivitas yang mendekati dengan resistivitas model awal.



Gambar 4. Hasil forward 2D untuk model lapisan homogen

Seperti yang terlihat pada output gambar 4, perhitungan hanya dilakukan dikarenakan

matriks koefisien A singular (*divided by zero*). Namun, masih belum ditemukan elemen matriks yang menyebabkan singular. Akan tetapi, nilai resistivitas yang diperoleh 101,66 Ohm.m sudah cukup mendekati nilai data sintesis yaitu 100 Ohm.m. Perubahan posisi elektroda dengan jarak spasi tetap menghasilkan nilai resistivitas yang berbeda dan ketika spasi elektroda diperbesar menjadi 3 – 5 grid, nilai resistivitas akan semakin jauh (error semakin besar). Hal ini mungkin disebabkan karena metode numerik beda hingga menghitung beda nilai di tiap grid, sehingga ketika spasi elektroda diperbesar, maka resolusi/ akurasi perhitungan pun akan mengecil. Dan juga, ketika posisi elektroda berada di tepi grid, hasil yang diperoleh tidak mendekati, yang mungkin dampak dari syarat batas yang digunakan.

5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil perhitungan dan analisa yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa program memberikan hasil yang mendekati dengan nilai model awal ketika pengukuran yang dilakukan di permukaan tidak mendekati kedua sisi tepi model grid (menghindari efek syarat batas). Selain itu, diperoleh bahwa nilai residu akan semakin membesar seiring dengan bertambahnya jarak spasi elektroda.

Untuk penelitian dan pengembangan selanjutnya, perlu dibuat model dengan jarak grid yang berbeda-beda dan juga, perlu mengkaji lebih banyak jurnal untuk proses membuat kontur distribusi resistivitas untuk model lapisan yang non-homogen dan terdapat anomali benda.

6. Ucapan Terimakasih

Terimakasih kepada dosen pembimbing Selly Feranie dan Firmansyah yang telah membantu dalam pembuatan artikel ini.

7. Daftar Pustaka

[1] Dey, A. dan Morrison, H.F. 1979. Resistivity modelling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. *Geophys. Prospect.*, **27**, 106-136.
[2] Grandis, H. 2009. Pengantar Pemodelan Inversi Geofisika. Intitut Teknologi Bandung: Bandung.
[3] Kearey, P., Brooks, M., dan Hill, I. 2002.

An Introduction to Geophysical Exploration 3rd
Ed. Blackwell Science Ltd : Cornwall.

[4] McGillivray, P.R. 1992. PhD thesis.
University of British Columbia : Canada,
January 1992.

[5] Spitzer, K. A 3-D finite-difference
algorithm for DC resistivity modelling using
conjugate gradient methods. *Geophys. J. Int.*,
123, 903-914.

[6] Telford, W.M., Geldart, L.P., dan Sheriff,
R.E. 1990. Applied Geophysics 2nd ed.
Cambridge University Press: New York.