

REVIEW: MENENTUKAN PERBANDINGAN JARI-JARI IONIK ATOM KECIL DENGAN ATOM BESAR (r/R) DAN SUDUT APIT (θ) PADA STRUKTUR KRISTAL TETRAHEDRON DENGAN TEORI MENELAUS

Irzaman¹, Raden Silfia Epriyanti², Johan Iskandar², Ade Kurniawan², Aminullah²

¹Staf Pengajar Departemen Fisika FMIPA Institut Pertanian Bogor, Kampus IPB Dramaga, Bogor, 16680

²Mahasiswa Pascasarjana S2 Biofisika Departemen Fisika FMIPA Institut Pertanian Bogor, Kampus IPB Dramaga, Bogor, 16680

Email: irzaman@ipb.ac.id, irzamanhusein@yahoo.com

Abstrak

Kajian struktur kristal bahan keramik merupakan salah satu bab kajian dalam mata kuliah Fisika Zat Padat untuk kurikulum program sarjana S1 Fisika di Indonesia. Struktur kristal tetrahedron menarik untuk dikaji ulang (*review*) agar dapat membekali pemahaman mahasiswa dalam menganalisis perbandingan jari-jari ionik atom kecil dengan jari-jari ionik atom besar (r/R) sebagai penyusun molekul dalam bahan keramik. Kajian perbandingan (r/R) pada struktur kristal tetrahedron (berbilangan koordinasi 4) lebih rumit dibandingkan dengan struktur kristal oktahedron (bilangan koordinasi 6) maupun kubus (bilangan koordinasi 8), karena dalam tetrahedron ionik atom kecil mengikat 4 ionik atom besar yang terletak dalam ruang tiga dimensi yang mengakibatkan sudut apitnya (θ) tidak saling tegak lurus satu sama lainnya. Kajian ulang struktur kristal tetrahedron berbantuan analisis Fisika Matematik dengan teori Menelaus, maka diperoleh hasil perbandingan (r/R) = 0,225 dan sudut apit (θ) = 109,5°.

Kata kunci: Jari-jari ionik, perbandingan r/R , struktur kristal, teori Menelaus, tetrahedron

Abstract

Study of crystal structure of ceramic materials was one of chapters in Solid State Physics for undergraduate curriculum in Indonesia. Tetrahedron crystal structure was interesting to be reviewed in order to provide an understanding to the students for analyzing the ionic radius ratio of small and large atoms (r/R) as molecule composer in ceramic materials. Study of ratio on tetrahedron crystal structure (coordination number of 4) was more difficult than octahedron (coordination number of 6) as well as cubic structures (coordination number of 8), because on tetrahedron, small atoms bound four large ionic atoms which were located in three-dimensional space that causing the wedge angle (θ) became not perpendicular to each other. A review of tetrahedron crystal structure using mathematical physics analysis of Menelaus theorem resulted r/R ratio of 0.225 with wedge angle of 109.5°.

Key words: crystal structure, ionic radius, Menelaus theorem, ratio of r/R , tetrahedron.

1. Pendahuluan

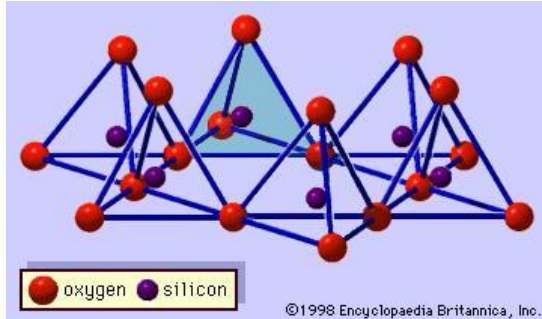
Awal mula berkembangnya teori Menelaus dalam ilmu matematika dasar pada tahun 1928 yakni untuk menganalisis perbandingan panjang dalam segitiga sama sisi [1 – 3]. Setelah itu Teori Menelaus sangat praktis dalam menganalisis perbandingan panjang dalam bentuk segitiga sembarang dan tetrahedon [4 – 12]. Penerapan Teori Menelaus meluas hingga dalam bidang teknik sipil maupun dalam analisis Fisika Matematika [5,7,8,10].

Perbandingan jari-jari ionik atom kecil dengan jari-jari ionik atom besar (r/R) sebagai penyusun molekul dalam bahan keramik merupakan isu besar dalam memahami struktur kristal bahan keramik

dalam fisika zat padat dan fisika permukaan [13 – 25].

Dalam Fisika zat padat, fisika kimia, dan fisika permukaan perbandingan jari-jari ionik atom kecil dengan jari-jari ionik atom besar (r/R) pun merupakan dasar dalam menentukan suatu ion atom kecil dapat mengikat ion atom besar yang terletak di sekelilingnya yang terkenal dengan istilah bilangan koordinasi [9 - 12, 26 - 30]. Kajian perbandingan jari-jari r/R pada struktur kristal tetrahedron (berbilangan koordinasi 4) lebih rumit dibandingkan dengan struktur kristal oktahedron (bilangan koordinasi 6) maupun kubus (bilangan koordinasi 8), karena dalam tetrahedron ionik atom kecil mengikat 4 ionik atom besar yang terletak dalam ruang tiga dimensi yang

mengakibatkan sudut apitnya (θ) tidak saling tegak lurus satu sama lainnya. Salah satu contoh senyawa yang berstruktur kristal tetrahedron (berbilangan koordinasi 4) adalah silikon oksida (SiO_2) seperti tampak dalam Gambar 1 [31 - 33].



Gambar 1. Struktur kristal dari senyawa silikon oksida (SiO_2) [31 - 33].

Tujuan dari makalah ini adalah untuk dikaji ulang (*review*) agar dapat membekali pemahaman mahasiswa dalam menganalisis perbandingan jari-jari ionik atom kecil dengan jari-jari ionik atom besar (r/R) pada struktur kristal tetrahedron (berbilangan koordinasi 4) dan sudut apit (θ) berbantuan analisis Fisika Matematik dengan teori Menelaus.

2. Metode Penelitian

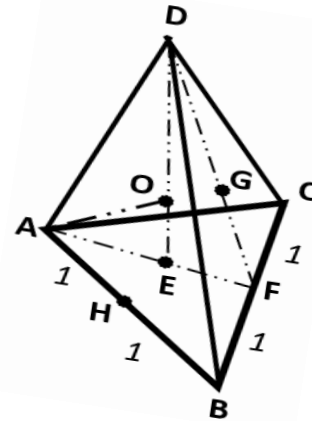
Metode penelitian yang dilakukan berupa telaah pustaka (studi literatur) dari buku, prosiding dan jurnal untuk menganalisis perbandingan jari-jari r/R dan sudut apit (θ) berbantuan analisis Fisika Matematik dengan teori Menelaus.

Teori Menelaus dalam limas segitiga sama sisi yang tampak dalam Gambar 2 dan mengikuti rumus seperti persamaan (1) dan (2): [1 - 12]

$$\frac{AH}{HB} \times \frac{BC}{CF} \times \frac{FE}{EA} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{DO}{OE} \times \frac{EA}{AF} \times \frac{FG}{GD} = 1 \quad (2)$$

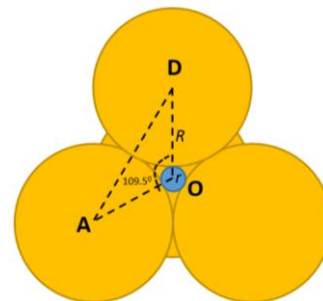
Dari persamaan (1) dan (2) ini akan diperoleh seluruh perbandingan garis di dalam segitiga sembarang dalam Gambar 2 termasuk jarak $OA = OD = OB$ dan sudut apit antara garis AO dengan $OD = \theta$.



Gambar 2. Struktur tetrahedron seperti limas segitiga sama sisi

3. Hasil dan Pembahasan

Ilustrasi struktur kristal tetrahedron seperti limas segitiga sama sisi dari Gambar 1 dan Gambar 2, maka diperoleh Gambar 3, di mana dalam Gambar 3 jari-jari ion atom kecil sebesar r terletak di titik berat limas segitiga sama sisi (titik O), sedangkan jari-jari ion atom besar sebesar R terletak di titik rusuk limas segitiga sama sisi (titik A dan titik D). Jarak garis $AO = DO = r + R$, dan jarak garis $AD = 2R$, serta sudut apit antara garis AO dengan $OD = \theta$.



Gambar 3. Ilustrasi struktur tetrahedron seperti limas segitiga sama sisi

Kajian perbandingan jari-jari r/R pada struktur kristal tetrahedron dan sudut apitnya (θ) dilakukan dengan lima (5) langkah berikut ini.

- (i) Mencari perbandingan garis dalam segitiga sama sisi ABC pada gambar 2 menggunakan Teori Menelaus.

$$\frac{FE}{EA} \times \frac{AH}{HB} \times \frac{BC}{CF} = 1$$

$$\frac{FE}{EA} \times \frac{1}{1} \times \frac{2}{1} = 1$$

$$\frac{FE}{EA} = \frac{1}{2}$$

(ii) Mencari perbandingan garis dalam segitiga sama sisi DAF pada gambar 2 menggunakan Teori Menelaus.

$$\frac{DO}{OE} \times \frac{EA}{AF} \times \frac{FG}{GD} = 1$$

$$\frac{DO}{OE} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{DO}{OE} = \frac{3}{1}$$

(iii) Mencari jarak garis $AO = BO = CO = DO$. Panjang sisi limas segitiga sama sisi $AB = BC = CA = CD = DA = BD$ adalah $2R$ yang terbentuk dari jari-jari dua atom besar berjari-jari R dan jarak garis $AO = DO = r + R$ (ilustrasi Gambar 3). Sedangkan titik O merupakan pusat atom kecil berjari-jari r , dengan berbantuan hukum Pythagoras.

$$FA^2 = AB^2 - BF^2$$

$$FA^2 = (2R)^2 - R^2$$

$$FA = R\sqrt{3}$$

$$FE = \frac{1}{3}FA = \frac{1}{3}\sqrt{3}R$$

$$EA = \frac{2}{3}FA = \frac{2}{3}\sqrt{3}R$$

$$DE^2 = AD^2 - EA^2$$

$$DE^2 = (2R)^2 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}R\right)^2$$

$$DE^2 = \frac{24}{9}R^2$$

$$DE = \frac{2}{3}\sqrt{6}R$$

$$DO = \frac{4}{3}DE = \frac{1}{2}\sqrt{6}R$$

$$OE = \frac{1}{4}DE = \frac{1}{6}\sqrt{6}R$$

(iv) Mencari sudut $AOD (\theta)$ pada $\triangle AOD$ berbantuan aturan cosinus.

$$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2 \cdot AO \cdot OD \cos \theta$$

$$(2R)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{6}R\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{6}R\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{6}R \cdot \frac{1}{2}\sqrt{6}R \cos \theta$$

$$4R^2 = \frac{12}{4}R^2 - \frac{12}{4}R^2 \cos \theta$$

$$4 = \frac{12}{4} - \frac{12}{4} \cos \theta$$

$$3 \cos \theta = -1$$

$$\cos \theta = -0.3333$$

$$\theta = 109.5^\circ$$

(v) Mencari perbandingan jari-jari r/R berbantuan aturan cosinus

$$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2 \cdot AO \cdot OD \cos 109.5^\circ$$

$$(2R)^2 = (R+r)^2 + (R+r)^2 - 2 \cdot (R+r) \cdot (R+r) (-0.3333)$$

$$4R^2 = 2(R+r)^2 - 2(R+r)^2 (-0.3333)$$

$$2R^2 = (R+r)^2 + 0.3333(R+r)^2$$

$$2R^2 = 1.3333(R+r)^2$$

$$1.4142R = 1.1547(R+r)$$

$$0.2595R = 1.1547r$$

$$\frac{r}{R} = 0.225$$

Akhirnya, kajian ulang struktur kristal tetrahedron berbantuan analisis Fisika Matematik dengan teori Menelaus, hukum Pythagoras dan aturan cosinus, diperoleh hasil perbandingan jari-jari $r/R = 0,225$ dan sudut apit $(\theta) = 109,5^\circ$.

4. Kesimpulan

Telah berhasil mengkaji ulang (*review*) struktur kristal tetrahedron berbilangan koordinasi 4 berbantuan analisis Fisika Matematik dengan teori Menelaus, dengan hasil perbandingan jari-jari $r/R = 0,225$ dan sudut apit $(\theta) = 109,5^\circ$.

Ucapan Terimakasih

Penelitian ini didanai oleh Hibah Penelitian Kerjasama Luar Negeri dan Publikasi Internasional, Kementerian Riset, Teknologi dan Pendidikan Tinggi tahun 2015.

Daftar Acuan

- [1] Durell, C. V. *Modern Geometry: The Straight Line and Circle*. London: Macmillan, (1928), pp. 42-44.
- [2] Beyer, W. H. (Ed.). *CRC Standard Mathematical Tables, 28th ed*. Boca Raton, FL: CRC Press, (1987), p. 122.
- [3] Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L. "Menelaus's Theorem." §3.4 in *Geometry Revisited*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., (1967), pp. 66-67.
- [4] Graustein, W. C. *Introduction to Higher Geometry*. New York: Macmillan, (1930), p. 81.
- [5] Grünbaum, B. and Shepard, G. C. "Ceva, Menelaus, and the Area Principle." *Math. Mag.* **68**, (1995), pp. 254-268.
- [6] Honsberger, R. "The Theorem of Menelaus." Ch. 13 in *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., (1995), pp. 147-154.

- [7] Pedoe, D. *Circles: A Mathematical View*, rev. ed. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., (1995), p. xxi.
- [8] Stephen, S., T. Yau, Letian Zhang. On formulas for Dedekind sums and the number of lattice points in tetrahedral. *Journal of Number Theory*, **129**, (2009), p. 1931.
- [9] Xue, L., Stephen S. T. Yau and Huaqing Zuo. A sharp polynomial estimate of positive integral points in a 4-dimensional tetrahedron and a sharp estimate of the Dickman-de Bruijn function. *Mathematische Nachrichten*. **288** (1), (2015), p. 61.
- [10] Lin, H., H. Guo, Y. Wang, G. F. Du, B. Dai. N-heterocyclic carbene-mediated transformations of silicon reagents. *Tetrahedron Letters*. **56** (8), (2015), p. 972.
- [11] Swarbhanu, S., R. Pal, M. Roy, N. Chatterjee, S. Sarkar, A. K. Sen. Nanodomain cubic copper (I) oxide as reusable catalyst for the synthesis of amides by amidation of aryl halides with isocyanides. *Tetrahedron Letters*. **56** (4), (2015), p. 623.
- [12] Kohsuke, O., T. Ooi. Design of supramolecular chiral ligands for asymmetric metal catalysis. *Tetrahedron Letters*. **56** (16), (2015), p. 2043.
- [13] Wells, D. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. London: Penguin, (1991), p. 150.
- [14] Uchino, K. *Ferroelectric Devices*, Marcel Dekker, Inc. New York (2000), p. 23.
- [15] Irzaman, Y. Darvina, A. Fuad, P. Arifin, M. Budiman, and M. Barmawi. Physical and Pyroelectric Properties of Tantalum Oxide Doped Lead Zirconium Titanate $[Pb_{0.9950}(Zr_{0.525}Ti_{0.465}Ta_{0.010})O_3]$ Thin Films and Its Application for IR Sensor. *J. Physica Status Solidi (a)*, **199** (3), (2003), pp. 416 – 424.
- [16] Fraden, J. *Handbook of Modern Sensors : Physics, Designs and Applications*. Springer-Verlag New York, Second Edition, (1996), p. 536.
- [17] Lines, M.E. and A.M. Glass, *Principles and Applications of Ferroelectric and Related Materials*. Clarendon Press, Oxford, (1977), p. 570.
- [18]. Somorjai, G.A. *Principle of Surface Chemistry*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, (1972).
- [19] Adamson, A.W. *Physical Chemistry of Surface*. Fourth edition, Wiley Interscience Publication, New York, (1982).
- [20] Irzaman, Heriyanto Syafutra, Endang Rancasa, Abdul Wahidin Nuayi, Tb Gamma Nur Rahman, Nur Aisyah Nuzulia, Idawati Supu, Sugianto, Farly Tumimomor, Surlianty, Otto Muzikarno, Masrur. The Effect of Ba/Sr ratio on Electrical and Optical Properties of $Ba_xSr_{(1-x)}TiO_3$ ($x = 0.25; 0.35; 0.45; 0.55$) Thin Film Semiconductor. *Ferroelectrics*, **445** (1), (2013) pp. 4 – 17.
- [21] Amir S, Arsat R, Xiuli H, Kalantar-Zadeh K, Wlodarski W: Polyvinilpyrrolidone/polyaniline composite based 36° YX LiTaO₃ surface acoustic wave H₂ gas sensor. *Sains Malaysiana*. **42** (2), (2013), p. 213.
- [22] Saima H, Mogi Y, Haraoka T: Development of PSA system for the recovery of carbon dioxide and carbon monoxide from blast furnace gas in steel works. *Energy Procedia*. **37**, (2013), p. 7152.
- [23] Zhu W, Qui X, Iancu V, Chen XQ, Pan H, Wang W, Dimitrijevic NM, Rajh T, Meyer HM, Paranthaman MP, Stocks GM, Weitering HH, Gu B, Eres G, Zhang Z: Band gap of narrowing titanium oxide semiconductors by noncompensated anion-cation codoping for enhanced visible-light photoactivity. *Phys Rev Lett*. **103** (22), (2009), p. 226401-1.
- [24] Ahmed, A.S, Shafeeq M, Singla M: Band gap narrowing and fluorescence properties of nickel doped SnO₂ nanoparticles. *J Luminescence*. **131**, (2011), p. 1.
- [25] Chakraborty, M, Ghosh A, Thangavel R: Experimental and theoretical investigations of structural and optical properties of copper doped ZnO nanorods. *J Sol-Gel Sci Technol*. **74** (2015), p. 756.
- [26] Futakuchi, T., H. Sugimori, K. Horii, A. Yanagawa and M. Adachi. Preparation of Piezoelectric Ceramic Transformer Operating in Bending Vibration Mode. *Jpn. J. Appl. Phys.*, **38** (6A), (1999), pp. 3596 – 3599.
- [27] Yoo, J., Y. Lee, K. Yoon, S. Hwang, S. Suh, J. Kim and C. Yoo. Microstructural, Electric Properties and Temperature Stability of Resonant Frequency in $Pb(Ni_{1/2}W_{1/2})O_3$ - $Pb(Mn_{1/3}Nb_{2/3})O_3$ - $Pb(Zr,Ti)O_3$ Ceramics for High Power Piezoelectric Transformer. *Jpn. J. Appl. Phys.*, **40** (5A) (2001), pp. 3256 – 3259.
- [28] West, A. R. *Solid State Chemistry and Its Applications*. John Wiley and Sons, Singapore (1989).
- [29] Kawai, H., Y. Sasaki, T. Inoue, T. Inoi and S. Takahashi. High Power Transformer Employing Piezoelectric Ceramics. *Jpn. J. Appl. Phys.*, **35** (9B), (1996), p. 5015.

- [30]. Debye, P. *Polar Molecules*. Dover Publications, Inc., New York, (1945).
- [31] Anonim. *Struktur Kristal Tetrahedron Silikon Oksida (SiO₂)*. Encyclopedia Britanica, Inc. (1998).
- [32] Magnus, F., A.S. Ingason, O.B. Sveinsson, S. Olafsson, J.T. Gudmundsson. Morphology of TiN thin films grown on SiO₂ by reactive high power impulse magnetron sputtering. *Thin Solid Films* **520**, (2011) p. 1621.
- [33] Ana G. S., Kjeld Pedersen, Zheshen S. Li, Per Morgen. Oxidation of the surface of a thin amorphous silicon film. *Thin Solid Films* **520**, (2011), p. 697.

