

EFEK SEBARAN BOSON INHOMOGEN PADA BINTANG BOSON

M. Fitrah Alfian R. S.^{*)}, Anto Sulaksono

Departemen Fisika FMIPA UI, Kampus UI Depok, 16424

^{*)}fitrahalfian@sci.ui.ac.id

Abstrak

Bintang boson statis dengan simetri bolamerupakan solusi dari sistem persamaan Einstein yang terkopel dengan persamaan relativistik Klein-Gordon dan Proca dari medan skalar kompleks pada simetri local $U(1)$. Perumusan sistem persamaan Einstein yang terkopel dengan persamaan relativistik Klein-Gordon dan Proca dilakukan di ruang lengkung yang kemudian metriknya dilimitkan ke ruang datar. Sistem persamaan tersebut diasumsikan tidak homogen sehingga menyebabkan tekanan pada arah tangensial berbeda dengan pada arah radial yang menunjukkan sifat anisotropis dari persamaan keadaan bintang boson. Penyelesaian sistem persamaan tersebut dilakukan secara numerik untuk melihat persamaan keadaan yang terbentuk pada bintang boson akibat adanya asumsi inhomogen tersebut. Perhitungan untuk kasus homogen juga dilakukan dengan menghilangkan suku-suku derivatif sistem persamaan tersebut di atas. Hasil dari perhitungan menunjukkan bahwa dengan asumsi inhomogen, syarat batas sistem persamaan tidak terpenuhi dan menyebabkan persamaan keadaan bintang yang terbentuk tidak stabil. Untuk kasus homogen, hasil yang didapatkan dapat menggambarkan keadaan bintang boson yang stabil.

Kata kunci: bintang boson, persamaan Klein-Gordon, persamaan Proca, inhomogen, homogen, persamaan keadaan

Abstract

Spherically symmetric static boson stars are solutions of the system of equations of Einstein equation which is coupled to the Klein-Gordon and Proca Equation with complex scalar field with $U(1)$ gauge symmetry. We look for the system of equations of Einstein equation which is coupled to the Klein-Gordon and Proca Equation in the curvature space then we limit the metric to the flat space. The system of equations is assumed to be inhomogeneous so, the pressure in tangential direction is different to the pressure in radial direction that shows the anisotropic equations of state (EOS). We find numerically solutions to see the equations of state which are formed in boson stars as the consequence of inhomogeneous assumption. We also find the solutions for the case of homogeneous assumption by omitting the derivative terms of that system of equations. The result shows that with the inhomogeneous assumption, the boundary conditions can't be fulfilled and causes the EOS unstable. For the case of homogeneous assumption, the result can describe the stable EOS of the boson stars.

Keywords: boson stars, Klein-Gordon equation, Proca equation, inhomogeneous, homogeneous, EOS

1. Pendahuluan

Studi tentang objek kompak telah dilakukan sejak beberapa dekade lalu. Sebagai contohnya, Chandrasekhar telah meneliti tentang massa bintang *white dwarfs* [1] pada 1931. Lalu diikuti dengan penemuan bintang neutron yang berawal dari ditemukannya neutron oleh James Chadwick pada 1932, di saat itu mulai diprediksi akan adanya bintang neutron. Lalu pada 1967, Bell dan Hewish menemukan pulsa radio yang menerangkan keberadaan bintang neutron [2]. Selain itu, beberapa penelitian menunjukkan bahwa materi quark, sebagai penyusun bintang quark, memiliki kestabilan yang lebih baik dibandingkan dengan materi nuklir [3], sehingga bintang quark dimungkinkan untuk terbentuk sebagaimana bintang neutron.

Pada penelitian kali ini, kami mempelajari tentang bintang kompak lainnya memiliki komponen utama

berupa medan skalar boson yang disebut sebagai bintang boson. Berbeda dengan bintang neutron, bintang ini belum berhasil diobservasi secara eksperimen. Namun, keberadaan partikel boson skalar telah dibuktikan keberadaannya berdasarkan eksperimen Large Hadron Collider [4], yaitu partikel Higgs boson yang diperkenalkan untuk menjelaskan keberadaan massa setelah perusakan simetri pada partikel-partikel lepton dan partikel-partikel boson vektor yang telah masuk ke dalam Model Standar Glashow-Weinberg-Salam. Dengan ditemukannya partikel boson skalar, maka hal ini dapat menjadi awal dari berkembangnya penelitian tentang bintang boson.

Penelitian tentang bintang boson ini dimulai pada tahun 1968 di mana Kaup [5] menggunakan medan skalar kompleks yang berinteraksi dengan gravitasi secara semiklasik. Selain itu, Ruffini dan Bonazzola [6] menggunakan kuantisasi medan skalar real dan menganggap energi partikelnya berada di keadaan dasar. Sedangkan penelitian ini melibatkan bintang

boson statis dengan simetri bolayang merupakan solusi dari sistem persamaan Einstein yang terkopel dengan persamaan relativistik Klein-Gordon dan Proca dari medan skalar kompleks pada simetri lokal $U(1)$. Bintang ini diasumsikan berinteraksi sendiri pada suhu 0 K.

Penelitian sebelumnya mengenai bintang boson bermuatan mengasumsikan sifat homogen pada sistem persamaan Einstein yang terkopel dengan persamaan relativistik Klein-Gordon dan Proca [7]. Penurunan sistem persamaan tersebut dilakukan di ruang lengkung yang kemudian metriknya dilimitkan ke ruang datar. Pada penelitian ini, sistem persamaan relativistik Klein-Gordon dan Proca diasumsikan tidak homogen (tetap memperhitungkan suku-suku derivatif medan vektor dan medan skalar). Dari asumsi ini, kami ingin melihat seberapa besar pengaruh efek inhomogen sebaran boson dan perbandingannya dengan efek homogen.

2. Metode Penelitian

Kami menggambarkan bintang boson yang terbentuk akibat adanya interaksi antarboson skalar yang disebabkan oleh pertukaran meson vektor. Untuk medan skalar boson ϕ dan medan vektor boson A_μ , Lagrangiannya adalah sebagai berikut:

$$\mathcal{L} = D_\mu^* \phi^* D^\mu \phi - m_b^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_v^2 A_\mu A^\mu \quad (1)$$

dengan $A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ dan $D_\mu = \partial_\mu + i g_{v\phi} A_\mu$ di mana $g_{v\phi}$ adalah konstanta yang menunjukkan kekuatan interaksi. Kami menggunakan $\phi(r, t) = \phi(r) e^{-i\omega t}$ sebagai ansatz. Kami menggunakan konvensi (+, -, -, -).

Dari Lagrangian tersebut, bisa didapatkan persamaan relativistik Klein-Gordon dan Proca untuk ruang datar berikut:

$$\phi'' + \frac{2}{r} \phi' + [(\omega - g_{v\phi} A_0)^2 - m_b^2] \phi = 0, \quad (2)$$

$$A_0'' + \frac{2}{r} A_0' + 2g_{v\phi}(\omega - g_{v\phi} A_0)\phi^2 - m_v^2 A_0 = 0, \quad (3)$$

Kemudian tensor *energy-stress-momentum* yang di-boost ke ruang lengkungnya adalah sebagai berikut:

$$T_0^0 = [m_b^2 + (\omega - g_{v\phi} A_0)^2] \phi^* \phi + \frac{1}{2} A_0'^2 + \phi'^2 + \frac{1}{2} m_v^2 A_0^2, \quad (4)$$

$$T_1^1 = [m_b^2 - (\omega - g_{v\phi} A_0)^2] \phi^* \phi + \frac{1}{2} A_0'^2 - \phi'^2 - \frac{1}{2} m_v^2 A_0^2, \quad (5)$$

$$T_2^2 = [m_b^2 - (\omega - g_{v\phi} A_0)^2] \phi^* \phi - \frac{1}{2} A_0'^2 + \phi'^2 - \frac{1}{2} m_v^2 A_0^2, \quad (6)$$

dan arus konservasinya sebagai berikut:

$$J_\mu = i(\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) + 2g_{v\phi} A_\mu \phi^* \phi. \quad (7)$$

Dengan mengasumsikan homogen, maka hanya tersisa suku-suku non-derivatif sehingga kami mendapatkan persamaan Klein-Gordon dan Proca berikut:

$$[(\omega - g_{v\phi} A_0)^2 - m_b^2] \phi = 0, \quad (8)$$

$$2g_{v\phi}(\omega - g_{v\phi} A_0)\phi^* \phi - m_v^2 A_0 = 0, \quad (9)$$

Kemudian persamaan keadaanya akan menjadi seperti berikut:

$$\rho = 2m_b^2 \phi^* \phi + \frac{1}{2} m_v^2 A_0^2, \quad (10)$$

$$p = \frac{1}{2} m_v^2 A_0^2, \quad (11)$$

dan densitas jumlah bosonnya menjadi seperti berikut:

$$n_b = 2m_b \phi^* \phi. \quad (12)$$

Kemudian sistem persamaan diferensial Klein-Gordon yang terkopel dengan Proca diselesaikan dengan metode Runge-Kutta orde-4 dengan syarat batas berikut:

$$\begin{aligned} \phi(r \rightarrow 0) &= \text{kons.}, & \phi(r \rightarrow \infty) &= 0, \\ \phi'(r \rightarrow 0) &= 0, & \phi'(r \rightarrow \infty) &= 0, \\ A_0(r \rightarrow 0) &= 0, & A_0(r \rightarrow \infty) &= 0, \\ A_0'(r \rightarrow 0) &= 0, & A_0'(r \rightarrow \infty) &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

Solusi dicari dengan mengasumsikan energi sistem (ω) berada pada keadaan dasar.

Setelah mendapatkan solusinya, kami mencari nilai persamaan keadaanya dengan persamaan (10) dan (11). Setelah mendapatkannya, kami memasukkannya ke persamaan Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) berikut:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \left(1 + \frac{p}{\rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{M}\right) \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad (14)$$

dan

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (15)$$

untuk mengetahui struktur bintang tersebut. Lalu kami juga membutuhkan persamaan $\rho(p)$ untuk mempermudah perhitungan.

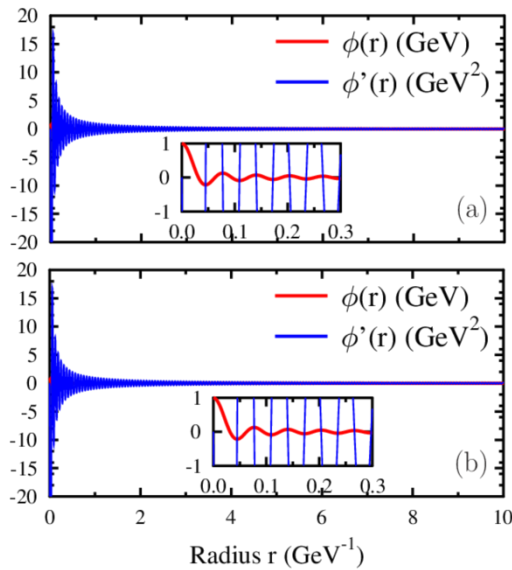
3. Hasil dan Pembahasan

Kami menggunakan nilai parameter $\phi(0) = 1 \text{ GeV}$ sebagai syarat batas awal untuk medan skalar. Selain itu juga kami memvariasikan massa boson skalar, yaitu 100 GeV dan 1 GeV yang merupakan asumsi di mana partikel boson skalar memiliki massa yang berorde sama dengan massa partikel Higgs boson dan massa nukleon. Selain itu kami juga memvariasikan parameter interaksi $y = m_b/m_l$ dengan $m_l =$

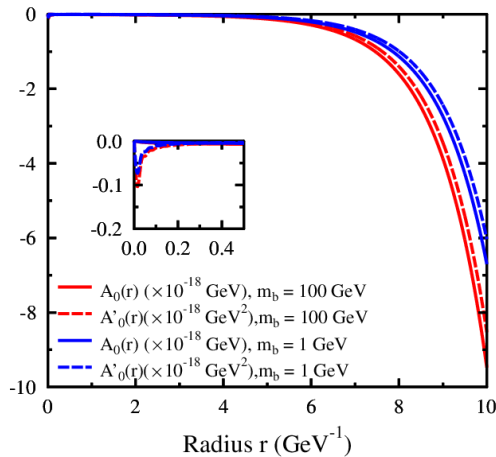
$\sqrt{2}m_v/g_{v\phi}$ [7]. Interaksi yang kami gunakan adalah sebagai berikut:

1. Kasus bebas, yaitu $m_l = M_{Pl}$ (massa Planck),
2. Limit Landau, yaitu $m_l = m_b$,
3. Interaksi lemah, yaitu $m_l = 100$ GeV,
4. Interaksi kuat, yaitu $m_l = 100$ MeV.

Kami mendapatkan hasil bahwa semakin besar konstanta kopling interaksinya, mengakibatkan semakin besarnya solusi medan vektor yang kami dapatkan. Kami menampilkan grafik untuk kasus bebas dengan $m_v = 1$ GeV. Untuk asumsi inhomogen, kami mendapatkan hasil berikut:



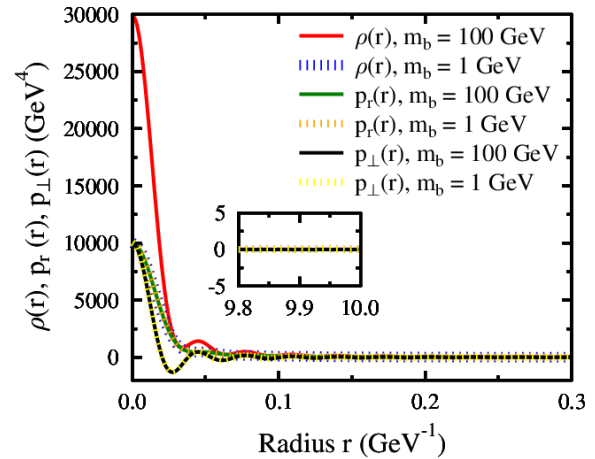
Gambar 1. Solusi medan skalar dan turunannya dari efek inhomogen untuk kasus bebas dan $m_v = 1$ GeV dengan (a) $m_b = 100$ GeV dan (b) $m_b = 1$ GeV.



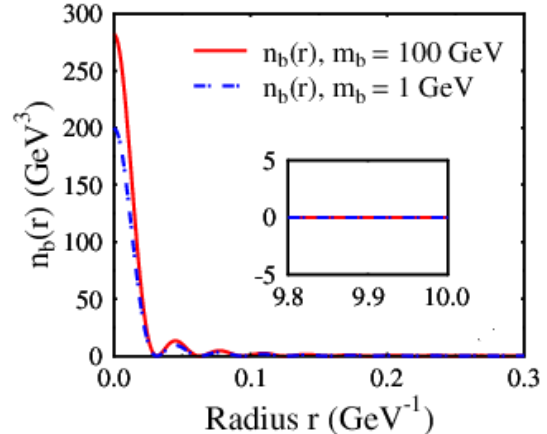
Gambar 2. Solusi medan vektor dan turunannya dari efek inhomogen untuk kasus bebas dan $m_v = 1$ GeV

Gambar 1 menunjukkan bahwa solusi yang kami dapatkan memenuhi syarat batas di mana ketika radius besar, maka solusi medan skalarnya akan mendekati 0 GeV. Namun, solusi medan skalar tersebut tidak stabil atau terlihat seperti fungsi osilasi teredam. Hal ini

sesuai dengan teorema Derrick [8]. Sedangkan untuk solusi medan vektor yang kami dapatkan tidak memenuhi syarat batas yang ada. Dari gambar 2 terlihat bahwa semakin besar radius, maka semakin besar pula medan vektornya. Seharusnya semakin besar radius, maka semakin kecil pengaruh interaksi partikel meson vektor yang ditandai dengan mengecilnya medan yang dihasilkan.



Gambar 3. Persamaan keadaan dari efek inhomogen untuk kasus bebas dan $m_v = 1$ GeV.

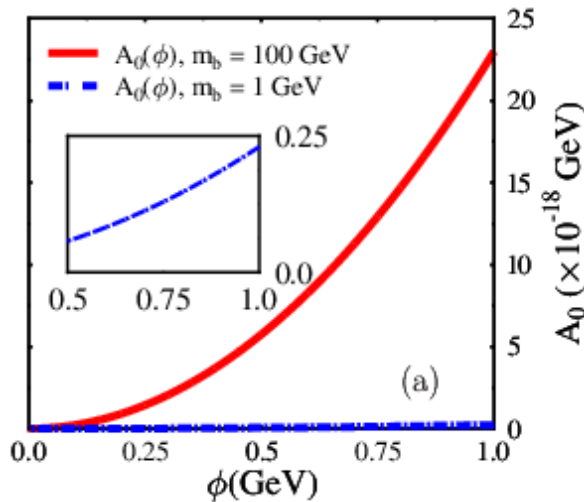


Gambar 4. Densitas jumlah partikel boson dari efek inhomogen untuk kasus bebas dan $m_v = 1$ GeV.

Persamaan keadaan yang kami dapatkan terlihat pada gambar 3. Dari gambar tersebut kami mendapatkan persamaan keadaan yang tidak stabil yang disebabkan oleh solusi medan skalar yang tidak stabil. Densitas energi (ρ) pada saat $m_b=1$ GeV lebih stabil dibandingkan saat $m_b=100$ GeV. Lalu tekanan pada arah radial (p_r) yang dihasilkan tidak stabil dan tidak jauh berbeda untuk setiap massa boson skalar karena kontribusi terbesar ada pada medan vektornya. Lalu tekanan arah tangensial (p_\perp) yang kami dapatkan sangat tidak stabil karena nilai tekanan bisa mencapai daerah negatif pada grafik padahal secara fisis, tekanan tidak boleh bernilai negatif. Densitas jumlah

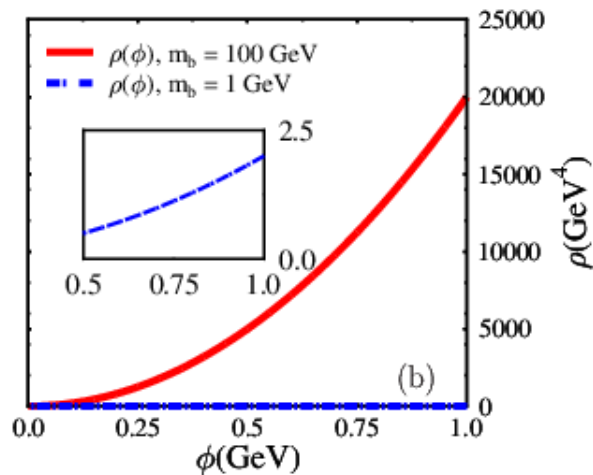
partikel yang dihasilkan pun tidak stabil yang juga ditandai dengan adanya osilasi pada gambar 4.

Untuk asumsi homogen, kami mendapatkan hasil berikut:



Gambar 5. Solusi medan vektor dari efek homogen untuk kasus bebas dan $m_\nu = 1\text{GeV}$

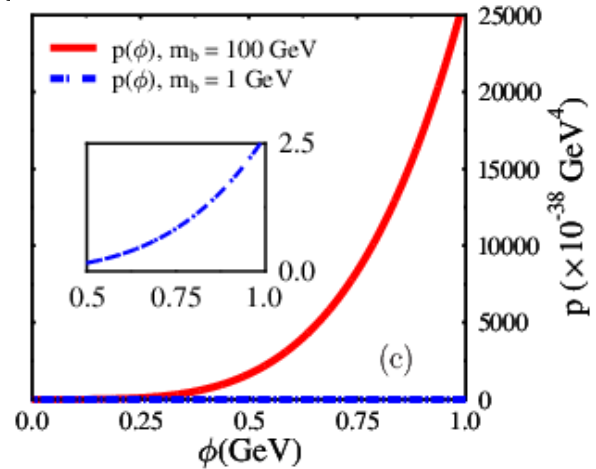
Gambar 5 menunjukkan solusi medan vektor yang bergantung pada medan skalar. Kedua nilai medan skalar dan medan vektor berkurang hingga menuju titik 0 (nol) yang menunjukkan bahwa telah memenuhi syarat batas. Solusi yang kami dapatkan dari asumsi ini pun stabil atau tidak berosilasi seperti pada solusi asumsi inhomogen.



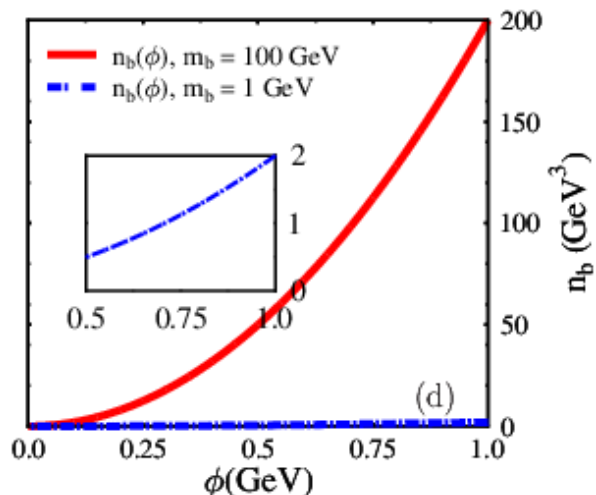
Gambar 6. Densitas energi dari efek homogen untuk kasus bebas dan $m_\nu = 1\text{GeV}$.

Gambar 6–8 menunjukkan densitas energi, tekanan, dan densitas jumlah partikel untuk asumsi homogen yang bergantung pada nilai medan skalar. Dari ketiga grafik tersebut terlihat bahwa semakin besar nilai massa boson skalar, maka semakin besar nilai persamaan keadaannya dan juga densitas jumlah partikelnya. Akibat adanya asumsi homogen, tekanan pada arah radial dan arah tangensial pun menjadi sama besar. Dari gambar 6-8 juga terlihat bahwa persamaan

keadaan dan densitas jumlah partikelnya stabil dan menuju nilai 0. Dengan nilai yang stabil ini, nantinya dapat membentuk keadaan bintang boson yang stabil pula.

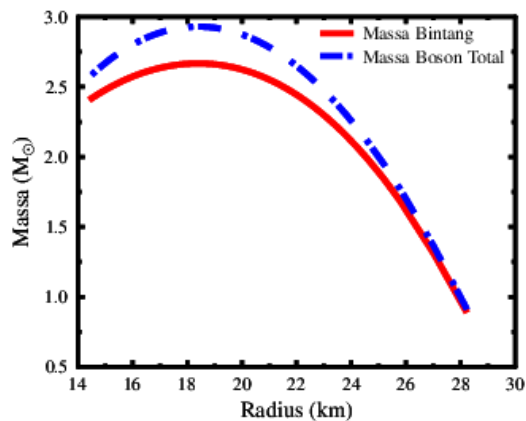


Gambar 7. Tekanan dari efek homogen untuk kasus bebas dan $m_\nu = 1\text{GeV}$.



Gambar 8. Densitas jumlah partikel boson dari efek homogen untuk kasus bebas dan $m_\nu = 1\text{GeV}$.

Sebagai contoh, kami menampilkan massa maksimum bintang dan juga massa boson total bintang untuk $m_b = 1\text{ GeV}$ dan interaksi kuat. Kami mendapatkan massa maksimum bintang = $2.667M_\odot$ dan massa boson total = $2.931M_\odot$. Perbedaan massa bintang dan massa boson total disebabkan tidak dimasukkannya faktor energi ikat gravitasi.



Gambar 9. Relasi massa bintang dan massa boson total dengan radius bintang.

4. Kesimpulan

Kami mendapatkan bahwa solusi sistem persamaan Klein-Gordon yang terkopel dengan Proca memiliki solusi medan skalar yang tidak stabil dan solusi medan vektor yang tidak memenuhi syarat batas. Berbeda dengan asumsi homogen di mana suku-suku derivatif persamaan Klein-Gordon dan Proca yang terkopel diasumsikan menghilang, solusi medan skalar dan medan vektor yang kami dapatkan memenuhi syarat batas dan stabil. Konstanta kopling sebagai penentu interaksi dan massa boson skalar yang divariasikan tidak mempengaruhi bentuk solusi yang dihasilkan, namun mempengaruhi besarnya nilai solusi yang dihasilkan. Persamaan keadaan yang dihasilkan dari asumsi inhomogen pun tidak stabil sehingga tidak bisa membentuk bintang boson yang stabil. Sedangkan dengan asumsi homogen, persamaan keadaan yang dihasilkan stabil yang menunjukkan bahwa dapat terbentuk bintang boson yang stabil.

Ucapan Terimakasih

Terimakasih kepada pihak yang mendukung dalam penelitian ini. Terima kasih untuk sivitas akademika Departemen Fisika Universitas Indonesia dosen-dosen dan teman-teman di Laboratorium Teori atas diskusi dan semua bantuannya.

Daftar Acuan

- [1] Chandrasekhar, S., The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs. *Astrophysical Journal* 74 (1931), p.81-82.
- [2] J. M. Lattimer, Neutron Stars. SLAC Summer Institute on Particle Physics (2005).
- [3] Weber, F. Strange Quark Matter and Compact Stars. arXiv: astro-ph/0407155v2 (2004).
- [4] Chatrchyan, S. et al., Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS

Experiment at the LHC. *Phys. Lett. B*, 716, (2012) 30.

- [5] David J. Kaup, Klein-Gordon Geon, *Phys. Rev.* 172 (1968), p. 1331-1342.
- [6] R. Ruffini and S. Bonazzola, Systems of Self-Gravitating Particles in General Relativity and the Concept of an Equation of State, *Phys. Rev.* 187 (1969), p. 1767-1783.
- [7] P. Agnihotri, J. Schaffner-Bielich, and I. N. Mishustin, Boson Stars with Repulsive Self-Interaction, *Phys. Rev. D.* 79 (2009), 084033.
- [8] G. H. Derrick, Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles, *Journal of Mathematical Physics* 5 (1964), p. 1252-1254.

