p-ISSN: 2339-0654
e-ISSN: 2476-9398

DOI: doi.org/10.21009/03.1301.FA37

KAJIAN TEORITIK PERSAMAAN DIFERENSIAL STOKASTIK DAN PROBABILITY DENSITY FUNCTION BAGI GERAK BROWNIAN GEOMETRIK LINEAR DAN NONLINEAR

S P Tampubolon[1, a)], D S Palupi[1, b)])

[1] *Departemen Fisika, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta 55281, Indonesia*

Email: [a)] stepanus.tampubolon@mail.ugm.ac.id, [b)]dwi_sp@ugm.ac.id

Abstrak

Telah dilakukan kajian teoritik persamaan diferensial stokastik bagi Gerak Brownian Geometrik linear maupun nonlinear dan dicari penyelesaian fungsi rapat peluangnya (*Probability Density Function*) serta karakteristiknya. Penelitian yang dilakukan bersifat teoritis. Penelitian dilakukan dengan cara menentukan persamaan diferensial stokastik bagi gerak Brownian geometrik linear maupun nonlinear. Penyelesaian fungsi rapat peluang bagi gerak Brownian geometrik dilakukan dengan menggunakan persamaan Fokker-Planck padanan persamaan diferensial stokastiknya. Gerak Brownian Geometrik linear dengan bagian drift konstan tidak memiliki fungsi rapat peluang yang berlaku pada seluruh x dan t. Gerak Brownian Geometrik non linear akan memiliki fungis rapat peluang yang berlaku pada seluruh x dan t dengan syarat tertentu.

Kata-kata kunci: tuliskan kata-kata kunci tidak lebih dari satu baris.

Abstract

A theoretical study has been conducted on stochastic differential equations for both linear and nonlinear Geometric Brownian Motion, focusing on deriving the Probability Density Function (PDF) and its characteristics. The research is purely theoretical. The study involved formulating stochastic differential equations for both linear and nonlinear Geometric Brownian Motion. The solution for the probability density function of Geometric Brownian Motion was obtained using the Fokker-Planck equation, which corresponds to its stochastic differential equation. Linear Geometric Brownian Motion with a constant drift term does not yield a probability density function that is valid for all x and t. In contrast, nonlinear Geometric Brownian Motion can have a probability density function valid for all x and ttt under certain conditions.

Keywords: tuliskan kata-kata kunci tidak lebih dari satu baris.

INTRODUCTION

Banyak fenomena di bidang fisika, biologi, kimia, ekonomi dan bidang lainnya yang melibatkan keadaan berfluktuasi[1]. Fenomena yang melibatkan fluktuasi dapat ditinjau dengan menggunakan proses stokastik baik dalam bentuk persamaan diferensial stokatik maupun persamaan Fokker-Plank. Salah satu bentuk proses stokastik yang digunakan adalah Gerak Brownian Geometrik [2,3,4]. Probability Density Function bagi suatu proses stokastik dapat dicari dengan menyelesaikan persamaan diferensial bagi *probability density function* yaitu persamaan Fokker-Planck. Setiap persamaan diferensial stokastik berpadanan dengan persamaan Fokker-Planck yang spesifik [5,6].

Pada penelitian ini akan dikaji Probability Density Function bagi Gerak Brownian Geometrik dengan bagian drift konstan. *Probability Density Function* bagi Gerak Brownian Geometrik linear ternyata tidak dapat diperoleh di t yang mendekati tak hingga. Oleh karena itu kemudian dicari bentuk Gerak Brownian non linear yang dapat memiliki *Probability Density Function* yang dapat berlaku di seluruh x dan t.

Makalah ini akan disajikan dengan sistematika sebagai berikut, Bab pertama merupakan pendahuluan, Bab kedua akan dikaji kaitan antara persamaan diferensial stokatik dengan persamaan Fokker-Planck.Bab ke tiga akan berisi penyelesaian peramaan Fokker-Planck bagi Gerak Brownian Geometrik linear, Pada Bab ke 4 dibahas Probability Density Function bagi Gerak Brownian Geometrik non linear dengan asumsi mengikuti proses Ito.

PERSAMAAN DIFERENSIAL STOKASTIK DAN PERSAMAAN FOKKER-PLANK

Persamaan diferensial stokastik memiliki bentuk umum yaitu [6]

$$dx(t) = h(h,x)dt + g(x,t)dB(t) \tag{1}$$

dengan $x(0) = x_0$, $h(x,t)$ menyatakan bagian detereministik, (x,t) menyatakan bagian stokastik atau bagian fluktuasi dan dB adalah proses Wiener standart atau Brownian standart.

Setiap persamaan diferensial stokastik memiliki persamaan Fokker-Planck padananya yang merupakan persamaan diferensial bagi Probability Density Functionnya. Bentuk umum persamaan Fokker-Plank bagi persamaan (1) adalah [5]

$$\frac{\partial}{\partial t}W(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}[h(x,t)] + 2\alpha g'(x)g(x)W(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}g^2(x,t)W(x,t) \tag{2}$$

dengan $W(x, t)$ adalah Probability Density Function bagi proses stokastik tersebut. Parameter α mendefinisikan bentuk pengintegralan yang akan digunakan pada tiap titik posisi yang memiliki nilai $0 \le \alpha \le 1$. Suatu persamaan diferensial stokastik dapat dikaji dengan bentuk integral Ito ($\alpha = 0$), Fisk-Stratonovich (= 1/2) atau Hänggi-Klimontovich/anti-Ito (α = 1) (7). Pada kasus g'=0 maka persamaan diferensial stokastik akan berbentuk

$$\frac{\partial}{\partial t}W(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{-hW(x,t) + g^{2\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left[g^{2(1-\alpha)}(x,t)W(x,t)\right]\right\} \tag{3}$$

GERAK BROWNIAN GEOMETRIK LINEAR

Proses Brownian Geometrik atau Gerak Brownian Geometrik merupakan salah satu bentuk proses stokastik dengan bentuk persamaan diferensial stokastik yang lebih spesifik dari pada pers.(2.1). Tinjau Proses Brownian Geometrik linear dengan bagian drift dan stokastik merupakan fungsi waktu sebagai

$$dx(t) = H(t)x(t)dt + G(t)x(t)dB(t) \tag{4}$$

Persamaan Fokker-Planck untuk persamaan (1) dapat dituliskan dengan bantuan persamaan (2) dan (3) yaitu

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -(H + 2\alpha G^2)\frac{\partial}{\partial x}(xW) + G^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2W) \tag{5}$$

atau

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(xW) + G^2\frac{\partial}{\partial x}\left\{x^{2\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^{2(1-\alpha)}W\right]\right\} \tag{6}$$

Misalkan penyelesaian persamaaan (5) dan (6) memiliki bentuk distribusi log normal yaitu

$$W(x,t) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{7}$$

Pada kasus tanpa drift atau ($H(t) = 0$) nilai μ dan σ^2 pada persamaan (7) adalah

$$\mu = \log\frac{E|x|^2}{\sqrt{E|x^2|}} \text{ dan } \sigma^2 = \log\frac{E|x^2|}{E|x|^2} \tag{8}$$

p-ISSN: 2339-0654
e-ISSN: 2476-9398

dengan $E[x]$ adalah nilai harap bagi x .
Pada kasus yang lebih umum yaitu terdapat drift, maka harus dicari terlebih dahulu bentuk $E[x]$ dan nilai $E[x^2]$ dengan memanfaatkan persamaan (5) sebagai berikut:

$$\frac{\partial Wx}{\partial t} = -x(H + 2\alpha G^2)\frac{\partial}{\partial x}(xW) + xG^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2W)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty Wxdx = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty Hx\frac{\partial}{\partial x}xWdx + G^2\left[\int_0^\infty G^2x\frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2Wdx - \int_0^\infty 2\alpha G^{2x}\frac{\partial}{\partial x}xWdx\right] \tag{9}$$

Mengingat $E[x] = \underset{0}{\text{W}}x\,dx$ serta dengan memanfaatkan integral parsial $\int udv = uv - \int vdu$, persamaan (9) menjadi

$$\frac{d}{dt}E[x] = [H(t) + 2\alpha G^2(t)E(x)]$$

$$\frac{dE[x]}{E[x]} = [H(t) + 2\alpha G^2(u)du]$$

$$\log E[x] = \int_0^t [H(u) + 2\alpha G^2(u)du]$$

$$E[x] = \mu_0 \exp\int_0^t [H(u) + 2\alpha G^2(u)]\,du \tag{10}$$

Bentuk persamaan nilai harap orde kedua dapat ditemukan dengan cara yang sama yaitu mengalikan persamaan (5) dengan x^2 kemudian mengintegralkannya dari 0 sampai tak hingga sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dt}E[x^2] = 2[H(t) + (2\alpha + 1)G^2(t)]E(x^2)$$

$$\frac{dE[x^2]}{E[x^2]} = 2[H(t) + (2\alpha + 1)G^2(t)]dt$$

$$\log E[x^2] = \int_0^t 2[H(u) + (2\alpha + 1)G^2(u)]du$$

$$E[x] = (\mu_0^2 + \sigma_0^2)\exp\left(2\int_0^t 2[H(u) + (2\alpha + 1)G^2(u)]du\right) \tag{11}$$

dengan μ_0 sebagai nilai rata-rata dan σ^2 sebagai variansi x untuk nilai $t = 0$. Substitusi persamaam (3.7) dan (3.8) pada persamaan (3.4) memberikan

$$\mu = \log\frac{\left(\mu_0 \exp\left(\int_0^t [H(u) + 2\alpha G^2(u)]\,du\right)\right)^2}{\sqrt{(\mu_0^2 + \sigma_0^2)\exp\left(2\int_0^t 2[H(u) + (2\alpha + 1)G^2(u)]du\right)}} \tag{12}$$

dan

$$\sigma^2 = \frac{(\mu_0^2 + \sigma_0^2)e^{2\int_0^t 2[H(u)+(2\alpha+1)G^2(u)]du}}{\mu_0 e^{\left(\int_0^t [H(u)+2\alpha G^2(u)]du\right)^2}} \tag{13}$$

Persamaan (12) dan (13) dapat disederhanakan dengan memanfaatkan sifat $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$ dan $\log ab = \log a + \log b$ dihingga diperoleh

$$\mu = \frac{1}{2}\log\frac{\mu_0^4}{\mu_0^2 + \sigma^2} + \int_0^t [H(u) + (2\alpha - 1)G^2(u)]\,du \tag{14}$$

$$\sigma^2 = \log\frac{\mu_0^2 + \sigma^2}{\mu_0^2} + 2\int_0^t G^2(u)du \tag{15}$$

Jika nilai $\sigma_0 = 0$, persamaan (16) dan (17) menjadi

$$\mu = \log\mu_0 + \int_0^t [H(u) + (2\alpha - 1)G^2(u)]\,du \tag{16}$$

p-ISSN: 2339-0654
e-ISSN: 2476-9398

$$\sigma^2 = 2\int_0^t G^2(u)\,du \tag{17}$$

Sekarang didapatkan penyelesaian persamaan (5) yaitu

$$W(x,t) = \frac{\exp\left\{-\frac{\left(\log\frac{x}{\mu_0} - \int_0^t [H(u) + (2\alpha - 1)G^2(u)\,du]\right)^2}{4\int_0^t G^2(u)du}\right\}}{2x\sqrt{\pi\int_0^t G^2(u)\,du}} \tag{17}$$

Persamaan (17) dapat dibuktikan memenuhi persamaaan FP (5) dengan memasukan fugnsi pada persamaan (17) pada persamaan (5).
Pada kasus $H(u) = H_0$ and $G(u) = G_0$ maka probability density function (17) menjadi

$$W(x,t) = \frac{\exp\left\{-\frac{\left(\log\frac{x}{\mu_0} - H_0T - (2\alpha - 1)G_0^2 t\right)^2}{4\int_0^t G^2(u)\,du}\right\}}{2x\sqrt{\pi G_0^2}} \tag{18}$$

GERAK BROWN GEOMETRIK NON LINEAR

Pada penelitian ini hanya akan ditinjau proses stokastik dengan integral Ito atau parameter $\alpha = 0$. Gerak Brownian Geometrik yang akan ditinjau sekarang adalah gerak Brownian Geomterik non linear dengan bentuk

$$dX = H_0x^n + G_0XdW \tag{19}$$

Persamaan Fokker-Planck bagi persamaan (19) adalah

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(H_0x^nW) + G_0^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2W(x,t)\right)\right] \tag{20}$$

Penyelesaian asimtotik persamaan (20) yaitu $W_{as}(x) = \lim_{ts} W(x,t)$ memenuhi persamaan berikut

$$0 = -(H_0x^nW_{as}) + G_0^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2W_{as})\right] \tag{21}$$

Sehingga diperoleh

$$W_{as}(x) = \frac{C}{X^2}\exp\left[\frac{H_0x^{n-1}}{G_0^2n-1}\right]dx \tag{22}$$

dengan C adalah konstanta normalisasi. Konstanta normalisasi dapat diperoleh jika $\int_0^\infty W_{as}(x)\,dx = 1$ atau berlaku

$$\frac{1}{C} = \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\exp\left[\frac{H_0x^{n-1}}{G_0^2n-1}\right]dx \tag{23}$$

Untuk mengetahui Fungsi $W_{as}(x)$ konvergen pada seluruh x dan t akan ditinjau pada keaadaan $x \to 0$ dan $x \to \infty$. Pada keadaan $x \to 0$ integral maupun $x \to \infty$ bagian integral persamaan (23) akan konvergen jika $H_0 < 0$ dan $n - 1 > 0$, atau $n > 1$. Integral pada persamaan (23) menghasilkan

$$W_{as}(x) = \frac{n-1}{\left(\frac{n-1}{H_0}G_0^2\right)^{\frac{1}{n-1}}\Gamma\left(\frac{1}{1-n}\right)}\frac{\exp\left[\frac{H_0x^{n-1}}{G_0^2n-1}\right]dx}{x^2} \tag{24}$$

dengan $\Gamma\,(.)$ adalah fungsi Gamma

p-ISSN: 2339-0654
e-ISSN: 2476-9398

KESIMPULAN

Probability density function bagi Gerak Brown linear dengan bagian drift bukan fungsi waktu tidak konvergen di t mendekati tak hingga. Probability density function bagi Gerak Brown dengan bagian drift konstan akan diperoleh pada Gerak Brown non linear.

REFERENSI

[1] Horsthemke W and Lefever R 1984 Noise-Induced Transitions ~Springer-Verlag Berlin

[2] Black F and Scholes M1973 The Pricing of Option and Corporate Liabilities *The Journal ofPolitical Economy* 3 81 637-654.

[3] Dragulescu AA and Yakovenko VM 2002 Probability Distribution of Returns in The HestonModel with Stochastic Volatility *Quantitative Finance* 6 2 443-453

[4] Fuchs A, Herbert C, Rolland J, Wächte M, Bouchet F and Peinke J 2022 Instantons and the Pathto Intermittency in Turbulent Flows , *Physical Review Letters* 129, 034502

[5] Kuo HH 2006, *Introduction to Stochastic Integration*,Springer, USA.

[6] Oksendal B 2003 *Stochastic Differential Equations* Spinger-Verlag Heidelberg New York USA

[7] Giordano S, Cleri F, Blossey R 2023 Infinite ergodicity in generalized geometric Brownian motions with nonlinear drift *Physical Review E* 107 044111,