Seminar Nasional Fisika
Universitas Negeri Jakarta, 1 Juni 2013

Karakteristik Soliton Pada Persamaan Schrödinger Nonlinear

T. B. Prayitno

Jurusan Fisika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Jakarta
Jl. Pemuda Rawamangun No. 10 Jakarta Timur 13220
E-mail : trunk_002@unj.ac.id

Abstrak

Pada makalah ini telah dihitung telah dikaji karakteristik yang miliki oleh soliton pada persamaan Schrödinger nonlinear berdimensi ruang waktu (1+1). Dalam pembahasan ini akan dijabarkan dua besaran fisika, yaitu massa klasik dan muatan topologi soliton yang ditentukan oleh perumusan teori medan klasik. Khusus untuk perhitungan massa klasik, kami memberikan komentar terkait dengan hasil massa klasik pada makalah sebelumnya [Berkala Fisika Vol. 14, 75 (2011)] karena telah terjadi kesalahan perhitungan sehingga menimbulkan tafsiran yang salah. Tafsiran ini berkaitan dengan sifat relativistik yang dimiliki oleh soliton tersebut sebagai manifestasi adanya sifat partikel. Di samping itu, kami juga membuktikan bahwa muatan topologi pada persemaan Schrödinger nonlinear ini bernilai nol.

Abstract

It has been calculated in this manuscript the characteristic possessed by soliton of nonlinear Schrödinger equation in the case of (1+1) space-time dimension. In thus case, it will be discussed two physical entities, namely, classical mass and topological charge of nonlinear Schrödinger equation. Especially for the classical mass, we comment about the resulting calculation in the previous paper [Berkala Fisika Vol. 14, 75 (2011)] since there is such a wrong calculation that it can cause wrong interpretation. This interpretation is related to the relativistic property owned by the soliton as the manifestation of the particle nature. Besides we also prove that the value of topological charge in the nonlinear Schrödinger is zero.

Keywords: *Soliton, Schrödinger nonlinear, muatan topologi.*

1. Pendahuluan

Soliton merupakan sebuah gelombang nonlinear yang didapat dengan menyelesaikan persamaan differensial nonlinear yang menggambarkan persamaan gelombang klasik [1]. Persamaan gelombang nonlinear mempunyai sedikit solusi dibandingkan dengan persamaan gelombang linear karena solusi persamaan gelombang nonlinear tersebut tidak prinsip superposisi linear. Namun demikian, ada hal menarik dari sifat solusinya jika dibandingkan dengan persamaan gelombang linear. Hal itu terlihat dari sifat stabil yang diperoleh dengan menganalisis solusi persamaan gelombang tersebut. Solusi inilah yang dikenal sebagai solusi soliton.

Di dalam fisika nonlinear terdapat suatu definisi mengenai solusi stabil persamaan gelombang nonlinear tersebut. Di dalam salah satu referensi [2], solusi stabil yang didapat dengan menyelesaikan suatu persamaan gelombang nonlinear disebut sebagai solusi *solitary wave* atau solusi satu soliton. Melalui solusi satu soliton ini, kita dapat menghitung suatu besaran fisika, yaitu massa klasik soliton yang merepresentasikan suatu partikel [3]. Menurut teori medan klasik, massa soliton ini didapat melalui integrasi rapat Hamiltonian yang menggambarkan persamaan gerak dari soliton itu sendiri. Apa pun bentuk solusi dari sebuah persamaan gelombang nonlinear, hal yang harus terpenuhi munculnya solusi satu soliton yaitu solusinya mempunyai nilai konstan pada limit ($x \to \pm\infty$)

Dalam makalah ini akan dibahas dua besaran fisika, yaitu massa klasik dan muatan topologi dari soliton pada persamaan Schrödinger nonlinear (NLS) yang memiliki dimensi ruang waktu (1+1). Hal yang penting diingat adalah bahwa muatan topologi tersebut bukanlah muatan listrik yang kita kenal secara umum, melainkan muatan yang dikaitkan dengan objek geometri. Khusus untuk massa klasik, kami mengulas sedikit mengenai proses untuk mendapatkan hasil tersebut dan memberikan sedikit komentar. Berikut ini adalah susunan makalah yang disajikan, rumus umum massa klasik dan muatan topologi soliton untuk sembarang persamaan nonlinear akan dikaji pada bagian 2 sedangkan pada bagian 3 akan dihitung masing-masing nilai kedua besaran fisika tersebut. Ringkasan dari bahan seluruh kajian akan dijabarkan pada bagian 4.

2. Teori Dasar

Pertama, kita tinjau terlebih dahulu persamaan Schrödinger nonlinear dengan dimensi ruang waktu (1+1) sebagai berikut [4]

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\gamma|\psi|^2\psi=0. \quad (1)$$

Pada kasus di atas α didefinisikan koefisien dispersi kecepatan grup sedangkan γ menyatakan indeks bias nonlinear. Namun demikian, beberapa bentuk lain dari persamaan NLS dapat juga dilihat pada [3-7].

Menurut [4], solusi stasioner NLS yang dapat dihasilkan mempunyai bentuk

$$\psi(x,t)=\sqrt{\frac{2K}{\gamma}}\sec h\left(\sqrt{\frac{2K}{\alpha}}x\right)\exp(iKt), \quad (2)$$

dengan K adalah tetapan sembarang. Solusi di atas merupakan solusi satu soliton karena mempunyai karakteristik $\lim_{x\to\pm\infty}\psi(x,t)=0$. Untuk menghitung massa klasik dari suatu solusi satu soliton kita harus mengintegrasikan rapat Hamiltonian terhadap seluruh ruang

$$m=\int_{-\infty}^{\infty}H(x,t)\,dx, \quad (3)$$

dengan H merupakan rapat Hamiltonian yang secara umum dapat dituliskan

$$H=\psi_t^*p_t^*+\psi_t p_t-L, \quad (4)$$

dengan L adalah rapat Lagrangian dari persamaan gelombang yang bersangkutan. Khusus untuk NLS, bentuk rapat Lagrangian dapat dituliskan [8]

$$L=\frac{i}{2}(\psi^*\psi_t-\psi\psi_t^*)-\frac{\alpha}{2}|\psi_x|^2+\frac{\gamma}{2}|\psi|^4. \quad (5)$$

Bentuk dari rapat Lagrangian dan rapat Hamiltonian ini dapat juga dilihat pada [9].

Di sisi lain, muatan topologi untuk solusi satu soliton pada sembarang persamaan gelombang nonlinear dapat dituliskan [1]

$$Q=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx, \quad (6)$$

dengan rapat muatan topologi

$$\rho(x,t)=\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (7)$$

Pada bagian berikutnya, kita akan menggunakan persamaan (2), (3), dan (6)

3. Hasil dan Pembahasan

Dengan mensubstitusikan persamaan (2) ke (3), kita mendapatkan hasil

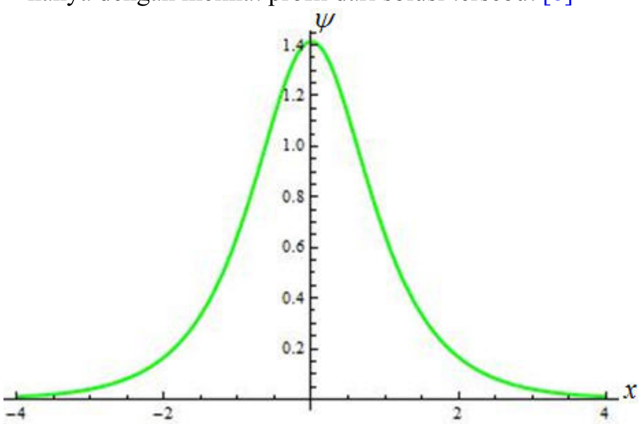
$$m=-\frac{0.942809\sqrt{\alpha}K^{3/2}}{\gamma}. \quad (8)$$

Hasil ini berbeda dari hasil perhitungan sebelumnya [8]. Apabila kita asumsikan pertama kali bahwa semua konstanta yang bersangkutan bernilai positif, maka melalui asumsi di atas pada persamaan (20), hasil tersebut tidak dapat dikatakan sebagai massa soliton mengingat hasil negatif tersebut. Hal ini dikarenakan bahwa massa klasik yang menggambarkan partikel real haruslah positif, $m>0$. Namun demikian, apabila K dipilih negatif maka perumusan massa tersebut berupa bilangan kompleks. Dalam hal ini, perumusan ini pun tidak menggambarkan arti fisis.

Di sisi lain, apabila kita memasukkan solusi pada persamaan (2) ke (6), maka akan didapatkan hasil muatan topologi

$$\begin{aligned}Q&=\psi|_{x=\infty}-\psi|_{x=-\infty}\\&=0.\end{aligned} \quad (9)$$

Hasil ini memang telah dapat diduga sebelumnya hanya dengan melihat profil dari solusi tersebut [8]



Gambar 1. Pulsa gelombang stasioner dari solusi persamaan NLS untuk $\alpha=\gamma=K=1$ pada saat $t=0$

4. Kesimpulan

Pada makalah ini telah dikaji ulang perhitungan massa klasik yang telah didapat sebelumnya pada [8]. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa massa klasik tersebut tidak menggambarkan suatu besaran fisis baik untuk nilai konstanta K positif maupun negatif. Di samping itu, muatan topologi yang didapat bernilai nol yaitu dengan menghitung besar ψ pada $x \to -\infty$ dan $x \to \infty$.

Daftar Pustaka

[1] H. J. Wospakrik, "Soliton and Particle," J. Theor. Comput. Stud. Vol. 4, 0308, 2005.

[2] P. G. Drazin and R. S. Johnson, "Solitons : an Introduction," Cambridge University Press, New York, USA, 2002.

[3] R. Rajaraman, "Solitons and Instantons," Elsevier Science Publishers B. V, Amsterdam, Netherlands, 1989.

[4] A. A. Iskandar, "Catatan Kuliah : Pengantar Fisika Nonlinear," Fisika ITB, Bandung, 2003.

[5] S. Leble and B. Reichel, "Coupled Nonlinear Schrödinger Equations in Optics Fiber Theory," Eur. Phys. J. Special Topics. Vol. 173, 5-55, 2009.

[6] A. C. Scott, F. Y. F. Chu, and D. W. Mclaughlin, "The Soliton : A New Concept in Applied Science," Proc. IEEE. Vol. 61. No. 10, 1443-1450, 1973.

[7] G. P. Agrawal, "Applications of Nonlinear Fiber Optics," Elsevier Inc., California, USA, 2008.

[8] T. B. Prayitno, "Massa Klasik Soliton Persamaan Schrödinger nonlinear," Berkala Fisika. Vol. 14, 75, 2011.

[9] A. Biswas and S. Konar "Introduction to non-Kerr Law Optical Solitons," Taylor & Francis Group, New York, USA, 2007.