

DOI: doi.org/10.21009/SPEKTRA.021.01

STUDI BRANEWORLD DIMENSI LIMA

Dewi Wulandari^{1,a)}

¹Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan, Jalan Willem Iskandar Pasar V Medan 20221, Indonesia

Email: ^{a)} wulziephyc@gmail.com

Abstrak

Studi yang berkaitan dengan braneworld dimensi lima dengan brane tunggal yang terletak di $x^5 = 0$ telah dilakukan, model Randall-Sundrum dan modifikasi Randall-Sundrum. Aspek yang ditinjau adalah skalar Ricci, persamaan Einstein, tensor energi-momentum, konstanta kosmologi dan massa Planck efektif dalam dimensi-empat. Dari ekspresi skalar Ricci dan analisis persamaan medan Einstein pada brane dan bulk dapat diinterpretasikan bahwa kedua metrik memiliki ruang-waktu yang berbeda.

Kata-kata kunci: Brane-world, Dimensi Ekstra, Model Randall-Sundrum, Model Modifikasi Randall-Sundrum.

Abstract

The five-dimensional braneworld models with single brane placed at $x^5 = 0$ have been studied, Randall-Sundrum model and a Modified Randall-Sundrum model. In this case, in terms of Ricci scalar, Einstein equations and energy-momentum tensor, cosmological constant and four-dimensional Planck effective mass have been investigated. From the Ricci scalar and Einstein equation expressions both on brane and bulk indicate that those metrics have different space-time.

Keywords: Brane-world, Extra Dimension, Randall-Sundrum Model, Modified Randall-Sundrum Model.

PENDAHULUAN

Ide skenario *braneworld* bahwa alam semesta dimensi-empat yaitu empat medan materi hidup adalah sebuah *brane* dan *brane* ini dikurung dalam ruang-waktu berdimensi lebih tinggi yang disebut *bulk* telah memberikan paradigma baru dalam menyelesaikan masalah hirarki dan konstanta kosmologi. Dalam *framework braneworld* hanya gravitasi yang bebas berpropagasi pada ruang-waktu *brane* dan *bulk* sedangkan seluruh medan materi hanya dapat berpropagasi pada *brane*. Perspektif inilah yang pada akhirnya dapat menjelaskan mengapa interaksi gravitasi sangat kecil dibandingkan dengan interaksi lain, sehingga dalam model sandar pengaruh efek gravitasi dapat diabaikan.

Salah satu model *braneworld* yang cukup populer adalah model Randall-Sundrum, dengan satu dimensi tambahan (koordinat- y). Lisa Randall dan Raman Sundrum [1,2] mengusulkan model *brane-world* tipe I dan II. Dalam model Randall-Sundrum I dibangun berdasarkan asumsi terdapat dua buah *brane* yang identik yang terletak pada $y=0$ yang disebut dengan *Planck brane (invisible brane)* dan

visible brane yang terleak pada $y = \pi r = L$, dimana L adalah jarak antara kedua *brane*. Model Randall-Sundrum I ini memberikan pendekatan untuk menyelesaikan masalah hirarki. Model Randall-Sundrum II diusulkan hanya ada satu *brane* yang digunakan untuk menganalisis perilaku medan materi dalam *brane* termasuk sifat lokalisasi.

Mekanisme lokalisasi medan materi pada *brane* secara natural menjadi sesuatu yang penting dalam *framework brane world*. Tidak semua medan materi dapat terlokalisasi pada *brane* metrik Randall-Sundrum [3,4,5]. Mengacu pada referensi [6,7] yang mengusulkan metrik dimensi-lima (koordinat- r) yang merupakan modifikasi metrik Randall-Sundrum ternyata menghasilkan sifat lokalisasi yang cukup berbeda jika dibandingkan dengan metrik asli Randall-Sundrum. Medan vektor spin-1 yang tidak dapat terlokalisasi pada *brane* metrik asli Randall-Sundrum ternyata dapat terlokalisasi pada *brane* metrik modifikasi Randall-Sundrum untuk kasus *decreasing warp factor*. Hal yang cukup menarik terjadi untuk kasus medan skalar bermassa yang terlokalisasi pada *brane* metrik modifikasi Randall-Sundrum yaitu munculnya mekanisme pembangkit massa sendiri yang mengingatkan pada mekanisme *self-consistent* Nambu dan Jona-Lasinio [8].

Perbedaan sifat lokalisasi medan materi pada metrik asli Randall-Sundrum dengan metrik modifikasi Randall-Sundrum membawa ketertarikan untuk menganalisis aspek-aspek yang berkaitan dengan kedua metrik dimensi-lima ini. Aspek yang dikaji meliputi ekspresi skalar Ricci, persamaan medan Einstein, konstanta kosmologi, tensor energi-momentum dan massa Planck efektif.

METRIK BRANE WORLD DIMENSI LIMA

Aksi dari gravitasi untuk model *brane world* dimensi lima dengan melibatkan konstanta kosmologi didefinisikan sebagai berikut [3-5]:

$$S_g = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^5x \sqrt{g} R_5 + \frac{\Lambda}{\kappa^2} \int d^5x \sqrt{g} + S_{materi} \quad (1)$$

dimana g adalah determinan tensor metrik dimensi-lima, R_5 adalah skalar Ricci dimensi-lima, Λ adalah konstanta kosmologi dan κ adalah konstanta kopling.

Metrik yang diusulkan dalam model Randall-Sundrum didefinisikan:

$$ds_{[y]}^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (2)$$

dimana $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ adalah metrik Minkowski dimensi-empat, k adalah konstanta yang diperoleh dari persamaan Einstein melalui ketertalaan (*fine-tuning*) dengan konstanta kosmologi.

Metrik yang diusulkan pada referensi [6,7] yang merupakan metrik modifikasi model Randall-Sundrum didefinisikan:

$$ds_{[r]}^2 = e^{-2k|r|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - e^{-2k|r|} dr^2. \quad (3)$$

Pada metrik modifikasi Randall-Sundrum, *warp factor*, $\alpha = e^{-k|x^5|}$ tidak hanya muncul pada komponen dimensi-empat tapi juga muncul pada komponen dimensi ekstra. Metrik (3) juga dapat ditulis dengan $ds_{[r]}^2 = e^{-2k|r|} \eta_{AB} dX^A dX^B$. Dari perspektif dimensi-empat, metrik (2) dan (3) dapat dihubungkan dengan koordinat transformasi $e^{-k|r|} dx^\mu = e^{-k|y|} dx^\mu$ dan untuk komponen dimensi ekstra dinyatakan dengan $dy = e^{-k|r|} dr$. Kedua metrik (2) dan (3) secara konformal adalah *flat* dengan koordinat transformasi untuk komponen dimensi ekstra pada metrik (2) didefinisikan dengan $dy^2 = e^{-2k|y|} dz^2$ [9-11].

Nilai symbol Christoffel dan tensor Ricci yang tidak nol untuk metric koordinat- y adalah:

$$\Gamma_{\mu\nu}^5 [y] = k e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu}; \Gamma_{5\mu}^{\nu} [y] = -k \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (4a)$$

$$R_{\mu\nu} [y] = (4k^2 - 2k\delta(y)) e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu};$$

$$R_{55} [y] = 4k^2 - 8k\delta(y),$$

dan Skalar Ricci untuk metrik (2) didefinisikan sebagai berikut:

$$R [y] = -20k^2 + 16k\delta(y), \quad (4b)$$

Nilai symbol Christoffel dan tensor Ricci yang tidak nol untuk metric koordinat- r adalah:

$$\Gamma_{\mu\nu}^5 [r] = k \eta_{\mu\nu}; \Gamma_{5\mu}^{\nu} [r] = -k \delta_{\mu}^{\nu}; \Gamma_{55}^5 [r] = -k, \quad (5a)$$

$$R_{\mu\nu} [r] = (4k^2 - 2k\delta(r)) \eta_{\mu\nu}; R_{55} [r] = -8k\delta(r),$$

dan skalar Ricci untuk metrik (3) didefinisikan sebagai berikut:

$$R [r] = -12k^2 e^{2kr} + 16k\delta(r) e^{2kr}. \quad (5b)$$

Ekspresi dari tensor Ricci dan skalar Ricci yang berbeda dari kedua metrik tersebut mengidentifikasi bahwa kedua metrik merepresentasikan ruang-waktu yang berbeda.

Dengan memberlakukan prinsip variasi aksi terkecil pada aksi (1) terhadap metrik g_{AB} , maka diperoleh persamaan medan gravitasi, persamaan Einstein dalam dimensi-lima:

$$G_{AB} + g_{AB} \Lambda = \kappa^2 T_{AB}, \quad (6a)$$

dimana G_{AB} adalah tensor Einstein dimensi-lima, T_{AB} adalah tensor energi-momentum yang menggambarkan distribusi materi dan energi yang didefinisikan melalui persamaan sebagai berikut:

$$T_{AB} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{materi}}{\delta g^{AB}}. \quad (6b)$$

Tensor Einstein pada *brane* untuk masing-masing sistem koordinat didefinisikan sebagai berikut:

$$G_{\mu\nu} = 6\eta_{\mu\nu} k^2 e^{-2k|y|} - 6\eta_{\mu\nu} k\delta(y), \quad (7a)$$

$$G_{\mu\nu} = 3\eta_{\mu\nu} k^2 - 6\eta_{\mu\nu} k\delta(r), \quad (7b)$$

dan tensor Einstein pada *bulk*:

$$G_{55} [y] = G_{55} [r] = -6k^2. \quad (8)$$

Dengan mensubstitusi komponen tensor Einstein untuk masing-masing sistem koordinat ke persamaan (6a), maka diperoleh persamaan medan Einstein pada *brane* sebagai berikut:

$$\kappa^2 T_{\mu\nu} = 6\eta_{\mu\nu} k^2 e^{-2k|y|} - 6\eta_{\mu\nu} k\delta(y) + e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} \Lambda [y], \quad (9a)$$

$$\kappa^2 T_{\mu\nu} = 3\eta_{\mu\nu} k^2 - 6\eta_{\mu\nu} k\delta(r) + e^{-2kr} \eta_{\mu\nu} \Lambda [r]. \quad (9b)$$

Kehadiran fungsi delta pada persamaan (9a) dan (9b) menginterpretasikan bahwa sumber materi yang diindikasikan dengan tensor energi-momentum terkurung pada *brane* yang berada pada titik $x^5 = 0$.

Persamaan Einstein pada bulk didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \kappa^2 T_{55} &= -6k^2 - \Lambda_{[y]}, & (10a) \\ \kappa^2 T_{55} &= -6k^2 - e^{-2kr} \Lambda_{[r]}. & (10b) \end{aligned}$$

Dalam model Randall-Sundrum, ruang-waktu *bulk* merupakan ruang-waktu *Anti de-Sitter* yang dikarakteristik dengan konstanta kosmologi yang bernilai negatif. Karena di dalam *bulk* tidak ada materi (vakum) maka $T_{55} = 0$, sehingga melalui ketertalaan dengan konstanta kosmologi, akan diperoleh $\Lambda_{[y]} = -6k^2$.

Dari hasil yang diperoleh di atas, maka dapat didefinisikan tensor energi-momentum pada *brane* untuk model Randall-Sundrum sebagai berikut:

$$T_{\mu\nu} = \frac{6\eta_{\mu\nu}k\delta(y)}{\kappa^2}, \quad (11)$$

dan tegangan *brane* (*brane tension*) didefinisikan sebagai berikut:

$$\sigma = \frac{6k}{\kappa^2} = \frac{\sqrt{-6\Lambda_{[y]}}}{\kappa^2}. \quad (12)$$

Dari persamaan (12) diperoleh ketertalaan (*fine-tuning*) antara konstanta k , konstanta kosmologi, $\Lambda_{[y]}$ dan juga tegangan *brane*, σ . Dari perumusan persamaan (6b) dan (11) dapat disimpulkan, dalam model Randall-Sundrum, S_{materi} dapat diindikasikan oleh fungsi delta tegangan *brane* dimensi-empat yaitu, $\sigma\delta(y)$. Hal yang berbeda terjadi pada modifikasi Randall-Sundrum, S_{materi} yang diperoleh tidak hanya diindikasikan oleh fungsi delta tegangan *brane* tetapi juga diindikasikan oleh momentum-energi bulk.

Untuk modifikasi Randall-Sundrum, dari persamaan (9a) dan (10b), tidak memungkinkan mendapatkan ketertalaan (*fine-tuning*). Hal paling sederhana yang dapat dilakukan adalah dengan mendefinisikan $\Lambda_{[r]} = 0$, sehingga tensor energi-momentum untuk sistem koordinat- r didefinisikan sebagai berikut:

$$\kappa^2 T_{\mu\nu} = 2k\eta_{\mu\nu}(k - 2\delta(r)) \quad (13a)$$

$$\kappa^2 T_{55} = -6k^2 \quad (13b)$$

Dari persamaan (13b) diperoleh komponen kelima tensor energi-momentum merupakan konstanta *bulk*, $T_{55} = -6k^2/\kappa^2$ sedangkan komponen tensor energi-momentum dimensi-empat, $T_{\mu\nu}$ didefinisikan dengan suku konstanta *bulk* $3k^2$ dan suku fungsi delta, $-6k\delta(r)$. Fungsi delta dirac mengindikasikan distribusi materi yang terkurung dalam *brane*. Untuk pengamat yang terkurung dalam *brane*, tensor energi-momentum efektif dimensi empat akan muncul sebagai suku konstanta kosmologi efektif dimensi-empat [6], $T_{\mu\nu}^{4D} = \Lambda_{4D}\eta_{\mu\nu}$ dengan $\Lambda_{4D} = 3k^2 - 6k$. Konstanta kosmologi efektif dapat bernilai negatif untuk $0 < k < 2$ dan positif untuk $k < 0$ atau $k > 2$. Untuk $k=2$, konstanta kosmologi efektif akan lenyap. Dari kondisi lokalisasi medan skalar yang terkopel dengan medan vektor [12], medan skalar bermassa maupun tak bermassa dan medan vektor tak bermassa dapat terlokalisasi pada *brane* metrik modifikasi Randall-Sundrum untuk kasus decreasing warp factor

dengan $k=1$. Kondisi ini akan memberikan nilai konstanta kosmologi negatif yang mengindikasikan ruang-waktu Anti de-Sitter.

MASSA PLANCK EFEKTIF DIMENSI EMPAT

Konstanta gravitasi Newton, G dapat dikaitkan dengan massa Plank melalui persamaan berikut ini:

$$G = \frac{1}{M_{pl}^2} \tag{14a}$$

Massa Planck efektif dimeni-empat, diperoleh dengan membandingkan aksi gravitasi dalam dimensi-lima dengan aksi gravitasi dalam dimensi-empat,

$$S = -\frac{1}{\kappa^2} \int d^5x \sqrt{g} R_5 = -\frac{M_5^3}{16\pi} \int d^5x \sqrt{|g|} R_5, \tag{15}$$

dengan $|g|$ adalah determinan metrik dimensi-lima, M_5 adalah massa Planck dalam dimensi lima, dan R_5 adalah skalar Ricci dalam dimensi-lima. Untuk metrik asli model Randall-Sundrum (2), $|g| = e^{-8k|y|} \det \eta_{\mu\nu}$, skalar Ricci dalam dimensi-lima dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \dots = e^{-2k|y|} \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \dots = e^{-2k|y|} R_4 + \dots, \tag{16}$$

Sehingga aksi dimensi-lima untuk model asli Randall-Sundrum didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{M_5^3}{16\pi} \int d^5x \sqrt{|g|} R_5 \tag{17} \\ &= -\frac{M_5^3}{16\pi} \int d^5x e^{-4k|y|} \sqrt{\det \eta_{\mu\nu}} (e^{-2k|y|} R_4 + \dots) \\ S &= -\frac{M_5^3}{16\pi} \int d^4x e^{-4k|y|} \sqrt{\det \eta_{\mu\nu}} \int dy e^{-2k|y|} R_4 + \dots \end{aligned}$$

Jika persamaan (17) diintegalkan terhadap dimensi-ekstra ($= 0$ sampai $y = \infty$) maka persamaan (17) akan menjadi:

$$S = -\frac{M_5^3}{16\pi} \int d^4x \frac{1}{2k} \sqrt{\det \eta_{\mu\nu}} R_4 + \dots \tag{18}$$

dan aksi gravitasi dalam dimensi-empat didefinisikan sebagai berikut:

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g_4} R_4. \tag{19}$$

Dengan membandingkan persamaan (18) dan (19) dan dengan menggunakan hubungan persamaan (14), maka massa Planck efektif dimensi-empat dalam model Randall Sundrum diperoleh sebagai berikut:

$$M_{pl[y]}^2 = \frac{M_5^3}{2k} \quad (20)$$

Dengan cara yang sama, untuk brane metrik modifikasi Randall-Sundrum, $|g| = e^{-10k|r|} \det \eta_{\mu\nu}$, skalar Ricci, $R = e^{-2k|r|} R_4 + \dots$, maka massa Planck efektif dimensi-empat dalam model modifikasi Randall Sundrum diperoleh sebagai berikut:

$$M_{pl[r]}^2 = \frac{M_5^3}{3k} \quad (21)$$

Dari persamaan (20) dan (21) dapat disimpulkan, untuk kedua model braneworld dimensi lima ini dengan brane tunggal, meskipun dimensi ekstra berukuran besar (menuju tak berhingga), nilai massa Planck efektif belum tereduksi mendekati orde skala elektroweak karena hanya bergantung pada massa Planck dimensi-lima dengan konstanta k .

SIMPULAN

Ekspresi dari skalar Ricci dan analisis persamaan medan Einstein mengindikasikan ruang-waktu yang didefinisikan dari metrik asli Randall-Sundrum dan metrik modifikasi Randall-Sundrum merepresentasikan ruang-waktu yang berbeda.

Dari persamaan Einstein pada *bulk*, untuk model Randall-Sundrum memungkinkan melakukan ketertalaan yang menyebabkan lenyapnya komponen kelima tensor energi-momentum dan diperoleh hubungan $\Lambda_{[y]} = -6k^2$, sedangkan untuk model modifikasi Randall-Sundrum tidak memungkinkan melakukan ketertalaan tetapi dengan mendefinisikan $\Lambda_{[r]} = 0$.

Melalui keterkaitan antara tensor energi dengan aksi materi, pada model Randall-Sundrum, S_{materi} didefinisikan dalam fungsi delta tegangan *brane*, $\sigma\delta(y)$ sedangkan pada model modifikasi Randall-Sundrum S_{materi} tidak hanya didefinisikan dalam fungsi delta tegangan *brane*, $\sigma\delta(y)$ tetapi disertai suku konstanta momentum-energi *bulk*, $3k^2$.

Dari rumusan massa Planck efektif dimensi-empat, meskipun dengan dimensi ekstra yang besar (tak berhingga) untuk kedua model *brane world*, tidak membuat massa Planck tereduksi mendekati orde skala elektroweak.

UCAPAN TERIMAKASIH

DW mengucapkan terimakasih atas dukungan beasiswa BPPDN DIKTI. Penelitian ini didanai oleh DIKTI melalui hibah disertasi tahun 2016.

DAFTAR ACUAN

- [1] Randall, L., dan Sundrum, R., Phys. Rev. Lett. 83, 3370 (1999).
- [2] Randall, L., dan Sundrum, R., Phys. Rev. Lett. 83, 4690 (1999).
- [3] M. Gogberashvili, Int. J. Mod. Phys. D 11, 1635 (2002)
- [4] A. Pomarol, Phys. Lett. B 486, 153 (2000)..
- [5] B. Bajc and G. Gabadadze, Phys. Lett. B 474, 282 (2000).
- [6] Jones P., Singleton D., Triyanta, Phys. Rev. D 88, 025048 (2013)
- [7] Triyanta, D. Singleton, P. Jones, G. Munoz, AIP Conference Proceedings 1617, 96 (2014).

- [8] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* 122, 345 (1961).
- [9] A. Perez-Lorenzana, arXiv: hep-ph/04066279
- [10] K. Koyama, *J. Comol. Asropart. Phys.* 09 (2004) 010
- [11] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, and N. Kaloper, *Phys. Rev. Lett.* 84, 586 (2000).
- [12] D. Wulandari, Triyanta, Jusak S. Kosasih, D. Singleton *AIP Conference Proceedings* 1677, 040003 (2015)

