PENYELESAIAN PERSAMAAN SCHRÖDINGER POTENSIAL NON-SENTRAL SCARF HIPERBOLIK PLUS ROSEN-MORSE TRIGONOMETRIK MENGGUNAKAN METODE SUPERSIMETRI MEKANIKA KUANTUM

M. Syaifudin,Suparmi, Cari

Pascasarjana Ilmu Fisika, Universitas Sebelas Maret
Jl. Ir. Sutami 36 A, Kentingan, Surakarta 57126

Email: sae_mr@yahoo.com

Abstrak

Tujuan dari penelitian ini adalah menyelesaikan persamaan Schrödinger potensial non-sentral Scarf hiperbolik plus Rosen-Morse trigonometrik menggunakan metode Supersimetri Mekanika Kuantum (SUSI MK).Spektrum energi dan fingsi radial diperoleh dari penyelesaian persamaan Schrödinger bagian radial, sedangkan fungsi gelombang bagian sudut dan bilangan kuntum orbital diperoleh dari persamaan Schrödinger bagian sudut polar.Spektrum energi dan bilangan kuantum orbital ditentukan dengan sifat *shape invariance*.Penentuan fungsi gelombang tingkat dasar bagian radial ditentukan dengan sifat *lowering operator* dan fungsi gelombang tereksitasi ditentukan dengan sifat *raising operator*.Baik untuk bagian radial maupun bagian polar ditentukan dengan menggunakan sifat *lowering operator* dan *raising operator*.

Abstract

The purpose of this research is to solve the Schrödinger equation of non-central potential Scarf hyperbolic plus Rosen-Morse trigonometric method Supersymmetry Quantum Mechanics (SUSY QM). Energy spectrum and radial functions derived from the completion of the radial part of the Schrödinger equation, while the wave functions of the corners and orbital quantum numbers obtained from the Schrödinger equation part of the polar angle. Energy spectrum and orbital quantum number is determined by the nature of the shape invariance. Determination of the wave functions of the radial part of the base rate is determined by the nature of lowering operators and the excited wave function is determined by the nature of the raising operator. Both for the radial and polar parts determined by using the properties of lowering and raising operators.

Keywords: *Schrödinger equation, the non-central potential Scarf hiperbolic plus Rosen-Morse trigonometric, Supersymmetry Quantum Mechanics*

1. Pendahuluan

Mekanika kuantum merupakan 'ilmu dasar' bagi penelaahan gejala dan sifat berbagai sistem *mikroskopik* (Tjia, 1999).Selain itu, teori kuantum juga terbukti mampu menjelaskan fenomena kuantum dari sistem makroskopik seperti superkonduktivitas dan superfluiditas yang memiliki potensi aplikasi penting.

Mekanika kuantum merupakan cabang ilmu fisika yang mempelajari perilaku materi dan interaksinya dengan energi pada skala atom dan partikel subatomik. Dalam mekanika kuantum, perilaku dari partikel dapat direpresentasikan dalam bentuk fungsi gelombang yang diperoleh dari penyelesaian persamaan Schrödinger (Suparmi, 2011).

Persamaan Schrödinger merupakan persamaan diferensial orde dua yang mendeskripsikan bagaimana keadaan kuantum suatu sistem fisika yang berubah terhadap waktu. Persamaan Schrödinger merupakan jantung mekanika kuantum.Jadi, pada intinya bahwa hasil dari penyelesaian persamaan Schrödinger terdiri dari spektrum energi atau tingkat-tingkat energi dan fungsi gelombang yang memberikan informasi tentang perilaku partikel yang dipengaruhi oleh potensial tersebut (Cari, 2013).

Metode Supersimetri Mekanika Kuantum (SUSI MK) merupakan 'pilihan peneliti' dalam menyelesaikan persamaan Schrödinger untuk potensial non-sentral Scarf hiperbolik plus Rosen-Morse trigonometrik. Hal ini didasarkan pada suatu alasan bahwa dengan menggunakan metode SUSI MK, penyelesaian persamaan Schrödinger melalui sifat degenerasinya menjadi lebih sederhana yaitu dari persamaan diferensial orde dua dapat difaktorkan menjadi persamaan diferensial orde satu, dan dengan metode ini pula dapat diketahui spektrum energi terendah dan tertinggi dari suatu partikel dengan lebih akurat.

2. Metode Penelitian

Objek dalam penelitian ini adalah persamaan Schrödinger dari potensial Scarf hiperbolik plus Rosen-Morse trigonometrik, yaitu :

a. Persamaan Schrödinger bagian radial untuk potensial Scarf hiperbolik plus Rosen-Morse trigonometrik

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{M^2+K^2-\frac{1}{4}}{\sinh^2(r)}-\frac{2MK\cosh(r)}{\sinh^2(r)}\right)\psi=\mathrm{E}\psi \quad (1)$$

dengan, $2MK=2b\left(a+\frac{1}{2}\right)$ dan

$$M^2+K^2=b^2+\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+l(l+1)$$

b. Persamaan Schrödinger bagian sudut untuk potensial Scarf hiperbolik plus Rosen-Morse trigonometrik

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2Q}{d\theta^2}+\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\nu(\nu+1)+m^2-\frac{1}{4}}{sin^2\theta}-2\mu\cot\theta\right)Q=EQ \quad (2)$$

dengan, $\nu'=\sqrt{\nu(\nu+1)+m^2}-\frac{1}{2}$ dan

$$E=\frac{\hbar^2}{2m}\left(l+\frac{1}{2}\right)^2$$

Instrumen yang digunakan dalam penelitian ini berupa persamaan-persamaan dalam metode SUSI MK, yaitu :

a. persamaan potensial efektif

$$V_{eff}=V_-(x;a_0)+E_0 \quad (3)$$

b. persamaan pasangan potensial supersimetri *shape invariance*

$$V_-(x;a_j)=W^2(x,a_j)-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x,a_j) \quad (4a)$$

$$V_+(x;a_j)=W^2(x,a_j)+\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x,a_j) \quad (4b)$$

c. persamaan umum tingkat energi ke-*n* untuk Hamiltonian penurun

$$E_n^{(-)}=\sum_{k=1}^{n}R(a_k) \quad (5)$$

dimana, $R(a_k)=V_+(x;a_{k-1})-V_-(x;a_k)$ (6)

d. persamaan umum spektrum energi tingkat ke-*n*

$$E_n=E_n^{(-)}+E_0 \quad (7)$$

e. persamaan fungsi gelombang tingkat dasar

$$\psi_0^{(-)}(x)=N\exp\left[-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int^{x}W(x)\,dx\right] \quad (8)$$

f. persamaan operator penaik

$$A^+=-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}+W(x) \quad (9)$$

g. persamaan fungsi gelombang tingkat ke-*n*

$$\psi_n^-(x;a_0)\sim A^+(x;a_0)\psi_{n-1}^-(x;a_1) \quad (10)$$

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan persamaan spektrum energi dan fungsi gelombang dengan menggunakan metode SUSI MK. Adapun langkah-langkahnya dapat ditempuh sebagai berikut :

a. Menentukan persamaan Schrödinger bagian radial dan sudut dari potensial non-sentral yang diketahui.
b. Menentukan potensial efektif (V_{eff}).
c. Menentukan persamaan spektrum energi tingkat dasar (E_0).
d. Menentukan persamaan superpotensial $W(x)$.
e. Menentukan persamaan pasangan potensial supersimetri $V_\pm(x;a_j)$.
f. Menentukan persamaan umum spektrum energi tingkat ke-n (E_n).
g. Menentukan bilangan kuantum orbital ℓ (khusus bagian sudut).
h. Menentukan persamaan fungsi gelombang tingkat dasar $\psi_0^{(-)}$.
i. Menentukan persamaan fungsi gelombang tingkat ke-*n* $\psi_n^{(-)}$.

3. Hasil dan Pembahasan

Persamaan spektrum energi E dan fungsi gelombang ψ pada potensial non-sentral Scarf hiperbolik plus Rosen-Morse trigonometrik ditentukan dengan cara menyelesaikan persamaan Schrödinger potensial tersebut. Persamaan Schrödinger tiga dimensi untuk potensial non-sentral Scarf hiperbolik plus Rosen-Morse trigonometrik dituliskan sebagai berikut :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right]+\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{(b^2+a(a+1))}{\sinh^2(r)}-\frac{2b\left(a+\frac{1}{2}\right)\cosh(r)}{\sinh^2(r)}\right)\psi+\frac{\hbar^2}{2mr^2}\left(\frac{\nu(\nu+1)}{\sin^2\theta}-2\mu\cot\theta\right)\psi=E\psi \quad (11)$$

Secara matematis, pers.(11)dapat dipisahkan menjadi tiga persamaan diferensial orde dua, yaitu persamaan bagian radial, bagian polar, dan bagian azimuthsebagai berikut :

Persamaan bagian radial

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dr^2}+\left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\left(b^2+a(a+1)\right)}{\sinh^2(r)}-\frac{2b\left(a+\frac{1}{2}\right)\cosh(r)}{\sinh^2(r)}\right)+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\psi=E\psi \quad (12)$$

atau

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{M^2+K^2-\frac{1}{4}}{\sinh^2(r)}-\frac{2MK\cosh(r)}{\sinh^2(r)}\right)\psi=E\psi \quad (13)$$

dengan $2MK=2b\left(a+\frac{1}{2}\right)$, dan

$$M^2+K^2=b^2+\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+l(l+1)$$

Persamaan bagian polar

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2Q}{d\theta^2}+\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\nu(\nu+1)+m^2-\frac{1}{4}}{sin^2\theta}-2\mu\cot\theta\right)Q=EQ \quad (14)$$

dengan$E=\frac{\hbar^2}{2m}\left(l+\frac{1}{2}\right)^2$

atau

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2Q}{d\theta^2}+\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\nu'(\nu'+1)}{sin^2\theta}-2\mu\cot\theta\right)Q=EQ \quad (15)$$

dengan $\nu'=\sqrt{\nu(\nu+1)+m^2}-\frac{1}{2}$

Persamaan bagian azimuth

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=-m^2 \text{ atau } \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}+m^2=0 \quad (16)$$

dengan$\Phi(\phi)=e^{im\phi}$

Berdasarkan bentuk persamaan potensial efektif dari potensial non-sentral Scarf hiperbolik plus Rosen-Morse trigonometrik bagian radial pada pers.(13), dapat dimisalkan persamaan superpotensialnya sebagai berikut:

$$W(r) = A\coth(r) + \mathrm{B}\,\mathrm{csch}(r) \tag{17}$$

Dengan menggunakan pers.(3), yaitu

$V_{eff} = V_{-}(x;a_0) + E_0$

sehingga

$$V_{eff} - E_0 = W^2(r) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(r) \tag{18}$$

maka diperoleh :

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\left(M^2+K^2-\frac{1}{4}\right)}{\sinh^2 r} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{2MK\cosh(r)}{\sinh^2(r)} - E_0 = \frac{\left(A^2+B^2+\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}A\right)}{\sinh^2 r} + \frac{\left(2AB+\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}B\right)\cosh(r)}{\sinh^2(r)} - A^2 \tag{19}$$

Dengan menyamakan ruas kiri dan kanan diperoleh

$$A = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left(M+\frac{1}{2}\right) \tag{20.a}$$

$$B = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}K \tag{20.b}$$

dan diperoleh persamaan spektrum energi tingkat dasar sebagai berikut :

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(M+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{20.c}$$

Dengan mensubtitusikan pers.(20.a) dan (20.b) ke pers.(17), maka persamaan superpotensial untuk potensial non-sentral Scarf hiperbolik plus Rosen-Morse trigonometrik bagian radial dapat ditulis kembali sebagai :

$$W(r) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left(M+\frac{1}{2}\right)\coth(r) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}K\,\mathrm{csch}(r) \tag{21}$$

sehingga

$$W^2(r) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\left(M+\frac{1}{2}\right)^2 + K^2\right)\mathrm{csch}^2(r) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(2\left(M+\frac{1}{2}\right)K\right)\coth(r)\,\mathrm{csch}(r) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(M+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{22}$$

dan

$$W'(r) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\left(M+\frac{1}{2}\right)\mathrm{csch}^2(r) - K\coth(r)\,\mathrm{csch}(r)\right) \tag{23}$$

Berdasarkan persamaan superpotensial ini dapat ditentukan pasangan potensial supersimetri $V_{-}(x;a_j)$dan $V_{+}(r;a_j)$. Dimana $V_{-}(x;a_j)$ ditentukan dengan menggunakan pers.(4a), sedangkan $V_{+}(r;a_j)$ ditentukan dengan menggunakan pers.(4b). Dengan mensubtitusikan pers.(22) dan (23) ke dalam pers.(4a) diperoleh :

$$\begin{aligned} V_{-}(r;a_0) &= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\left(M+\frac{1}{2}\right)^2 + K^2 - \left(M+\frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{csch}^2(r) \\ &- \frac{\hbar^2}{2m}K\left(2\left(M+\frac{1}{2}\right)-1\right)\coth(r)\,\mathrm{csch}(r) \\ &- \frac{\hbar^2}{2m}\left(M+\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

atau

$$V_{-}(r;a_0) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\left(M^2+K^2-\frac{1}{4}\right)\right)\mathrm{csch}^2(r) - \frac{\hbar^2}{2m}2MK\coth(r)\,\mathrm{csch}(r) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(M+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{24}$$

Sedangkan dengan mensubtitusikan pers.(22) dan (23) ke dalam pers.(4b) diperoleh :

$$V_{+}(r;a_0) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\left(M+\frac{1}{2}\right)^2 + K^2 + \left(M+\frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{csch}^2(r) - \frac{\hbar^2}{2m}K\left(2\left(M+\frac{1}{2}\right)+1\right)\coth(r)\,\mathrm{csch}(r) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(M+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{25}$$

Dari kedua pers.(24) dan (25), diketahui:

$$a_0 = M + \frac{1}{2} \tag{26a}$$

$$a_1 = M + \frac{1}{2} + 1 \tag{26b}$$

Dengan mengoperasikan pers.(26a) dan (26b) ke pers.(4a) diperoleh

$$V_{-}(r;a_1) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\left(M+\frac{1}{2}\right)^2 + K^2 + \left(M+\frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{csch}^2(r) - \frac{\hbar^2}{2m}K\left(2\left(M+\frac{1}{2}\right)+1\right)\coth(r)\,\mathrm{csch}(r) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(M+\frac{3}{2}\right)^2 \tag{27}$$

Berdasarkan pers.(6), maka

$$R(a_1) = V_{+}(x;a_0) - V_{-}(x;a_1) \tag{28}$$

Dengan mensubtitusikan pers.(25) dan (27) ke pers.(28) diperoleh :

$$R(a_1) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(M+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\left(M+\frac{3}{2}\right)^2 \tag{29}$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh Sehingga dapat digeneralisasi sebagai berikut :

$$\sum_{k=1}^{n} R(a_k) = \frac{\hbar^2}{2m}(\chi'-\lambda')^2 - \frac{\hbar^2}{2m}(\chi'-\lambda'-2n)^2 \tag{30}$$

Berdasarkan pers.(5), maka diperoleh

$$E_n^{(-)} = \sum_{k=1}^{n} R(a_k) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(M+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\left(M+\frac{1}{2}+n\right)^2 \tag{31}$$

Dengan mensubtitusikan pers.(20c) dan pers.(31) ke pers.(7) yaitu

$$E_n = E_n^{(-)} + E_0$$

akan diperoleh :

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(M+\frac{1}{2}+n\right)^2 \tag{32}$$

dengan$M_{12} = \dfrac{\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}+b\right)^2 + l\,(l+1)} \pm \sqrt{\left(a+\frac{1}{2}+b\right)^2 + l(l+1) - 4b\left(a+\frac{1}{2}\right)}}{2}$

Persamaan (32) merupakan persamaan energi tingkat ke-$n(E_n)$ untuk potensial non-sentral Scarf hiperbolik plus Rosen-Morse trigonometrik bagian radial.

Persamaan fungsi gelombang untuk potensial non-sentral Scarf hiperbolik plus Rosen-Morse trigonometrik bagian radial ditentukan dengan menggunakan metode operator supersimetri. Dengan mensubtitusikan pers.(21) ke dalam pers.(8) yaitu :

$$\psi_0^{(-)}(r;a_0) = N\exp\left[-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int^{r} W(r;a_0)\,dr\right]$$

sehingga

$$\psi_0^{(-)}(r;a_0) = N\exp\left[-\int^{r}\left(\mathrm{K}\,\mathrm{csch}(r) - \left(M+\frac{1}{2}\right)\coth(r)\right)dr\right] \tag{33}$$

dan diperoleh :

$$\psi_0^{(-)}(r;a_0) = N(\cosh(r)-1)^{-K}(\sinh(r))^{\left(M+K+\frac{1}{2}\right)}$$

(34)

Persamaan (34) merupakan persamaan umum fungsi gelombang tingkat dasar untuk potensial non-sentral Scarf hiperbolik plus Rosen-Morse trigonometrik bagian radial.

Sedangkan untuk fungsi gelombang tingkat satu ditentukan dengan mengoperasikan operator penaik (A^{+}) (pers.(9) ke dalam persamaan gelombang tingkat dasar (pers.(34)) dengan menggunakan pers.(10), yaitu

$$\psi_1^{(-)}(r;a_0) = A^{+}(r;a_0)\psi_0^{(-)}(r;a_1)$$

maka

$$\psi_1^{(-)}(r;a_0) = \left[-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dr} + W(r;a_0)\right]\psi_0^{(-)}(r;a_1) \tag{34}$$

sehingga

$$\psi_1^{(-)}(r;a_0) = N\left[-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dr} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\Big(\mathrm{K}\,\mathrm{csch}(r) - \left(M+\tfrac{1}{2}\right)\coth(r)\Big)\right](\cosh(r)-1)^{-K}(\sinh(r))^{\left(M+K+\frac{1}{2}\right)} \quad (35)$$

Dan dengan penjabaran sederhana diperoleh :

$$\psi_1^{(-)}(r;a_0) = N\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}[K(\cosh(r)-1)^{-1}(\sinh(r))^2 - (2M+K+2)\cosh(r)+K] \left((\cosh(r)-1)^{-K}(\sinh(r))^{\left(M+K+\frac{1}{2}\right)}\right) \quad (36)$$

Berdasarkan bentuk persamaan potensial efektif dari potensial non-sentral Scarf hiperbolik plus Rosen-Morse trigonometrik bagian polar pada pers. (15), dapat dimisalkan persamaan superpotensialnya sebagai berikut :

$$W(\theta) = A\cot(\theta) - \frac{B}{A} \quad (37)$$

Dengan menggunakan persamaan (18) yaitu :

$$V_{eff} - E_0 = W^2(r) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(r)$$

maka diperoleh :

$$A^2\csc^2(\theta) - 2B\cot(\theta) + \frac{B^2}{A^2} - A^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}A\csc^2(\theta) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nu'(\nu'+1)}{\sin^2(\theta)} - \frac{\hbar^2}{m}\mu\cot(\theta) - E_0 \quad (38)$$

atau

$$\left(A^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}A\right)\csc^2(\theta) - 2B\cot(\theta) + \frac{B^2}{A^2} - A^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nu'(\nu'+1)}{\sin^2(\theta)} - \frac{\hbar^2}{m}\mu\cot(\theta) - E_0 \quad (39)$$

Dengan menyamakan ruas kiri dan kanan, diperoleh :

$$A = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(\upsilon'+1) \quad (40a)$$

$$B = \frac{\hbar^2\mu}{2m} \quad (40b)$$

Dan didapatkan persamaan spektrum energi tingkat dasar sebagai berikut :

$$E_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mu^2}{(\upsilon'+1)^2} - (\upsilon'+1)^2\right) \quad (40c)$$

Dengan mensubtitusikan pers.(40a) dan pers.(40b) ke pers.(37), maka persamaan superpotensial untuk potensial non-sentral Scarf hiperbolik plus Rosen-Morse trigonometrik dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$W(\theta) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left((\upsilon'+1)\cot(\theta) - \frac{\mu}{(\upsilon'+1)}\right) \quad (41)$$

sehingga

$$W^2(\theta) = \frac{\hbar^2}{2m}(\upsilon'+1)^2\csc^2(\theta) - \frac{\hbar^2\mu}{m}\cot(\theta) + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mu^2}{(\upsilon'+1)^2} - (\upsilon'+1)^2\right) \quad (42)$$

dan

$$W'(\theta) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(\upsilon'+1)\csc^2(\theta) \quad (43)$$

Berdasarkan persamaan superpotensial ini dapat ditentukan pasangan potensial supersimetri $V_-(x;a_j)$dan $V_+(r;a_j)$. Dimana $V_-(x;a_j)$ ditentukan dengan menggunakan pers.(4a), sedangkan $V_+(r;a_j)$ ditentukan dengan menggunakan pers.(4b). Dengan mensubtitusikan pers.(42) dan (43) ke dalam pers.(4a) diperoleh :

$$V_-(\theta;a_0) = \frac{\hbar^2}{2m}(\upsilon'+1)^2\csc^2(\theta) - \frac{\hbar^2\mu}{m}\cot(\theta) + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mu^2}{(\upsilon'+1)^2} - (\upsilon'+1)^2\right) - \frac{\hbar^2}{2m}(\upsilon'+1)\csc^2(\theta) \quad (44)$$

atau

$$V_-(\theta;a_0) = \frac{\hbar^2}{2m\alpha^2}\upsilon'(\upsilon'+1)\csc^2(\theta) - \frac{\hbar^2\mu}{m}\cot(\theta) + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mu^2}{(\upsilon'+1)^2} - (\upsilon'+1)^2\right) \quad (45)$$

Sedangkan dengan mensubtitusikan pers.(42) dan (43) ke dalam pers.(4b) diperoleh :

$$V_+(\theta;a_0) = \frac{\hbar^2}{2m}(\upsilon'+1)^2\csc^2(\theta) - \frac{\hbar^2\mu}{m}\cot(\theta) + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mu^2}{(\upsilon'+1)^2} - (\upsilon'+1)^2\right) + \frac{\hbar^2}{2m}(\upsilon'+1)\csc^2(\theta) \quad (46)$$

atau

$$V_+(\theta;a_0) = \frac{\hbar^2}{2m}(\upsilon'+1)(\upsilon'+2)\csc^2(\theta) - \frac{\hbar^2\mu}{m}\cot(\theta) + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mu^2}{(\upsilon'+1)^2} - (\upsilon'+1)^2\right) \quad (47)$$

Dari kedua pers.(45) dan (47), diketahui

$$a_0 = \upsilon' \quad (48a)$$

$$a_1 = (\upsilon'+1) \quad (48b)$$

Dengan mengoperasikan pers.(48a) dan (48b) ke pers.(4a) diperoleh :

$$V_-(\theta;a_1) = \frac{\hbar^2}{2m}(\upsilon'+1)(\upsilon'+2)\csc^2(\theta) - \frac{\hbar^2\mu}{m}\cot(\theta) + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mu^2}{(\upsilon'+2)^2} - (\upsilon'+2)^2\right) \quad (49)$$

Dengan mensubtitusikan pers.(47) dan (49) ke pers.(28) diperoleh :

$$R(a_1) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mu^2}{(\upsilon'+1)^2} - (\upsilon'+1)^2\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mu^2}{(\upsilon'+2)^2} - (\upsilon'+2)^2\right) \quad (50)$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh $R(a_2)$, $R(a_3)$, ..., $R(a_k)$. Sehingga dapat digeneralisasi sebagai berikut :

$$\sum_{k=1}^{n} R(a_k) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mu^2}{(\upsilon'+1)^2} - (\upsilon'+1)^2\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mu^2}{\left((\upsilon'+1)+n\right)^2} - \left((\upsilon'+1)+n\right)^2\right) \quad (51)$$

Berdasarkan pers.(5), maka diperoleh :

$$E_n^{(-)} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mu^2}{(\upsilon'+1)^2} - (\upsilon'+1)^2\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mu^2}{\left((\upsilon'+1)+n\right)^2} - \left((\upsilon'+1)+n\right)^2\right) \quad (52)$$

Dengan mensubtitusikan pers.(40c) dan (52) ke pers.(7) yaitu :

$$E_n = E_n^{(-)} + E_0$$

didapatkan :

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\left((\upsilon'+1)+n\right)^2 - \frac{\mu^2}{\left((\upsilon'+1)+n\right)^2}\right) \quad (53)$$

Karena$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(l+\frac{1}{2}\right)^2$, maka diperoleh hubungan antara *m, l,* dan *n* sebagai berikut :

$$l = \sqrt{\left((\upsilon'+1+n)^2 - \frac{\mu^2}{\left(\upsilon'+1+n\right)^2}\right)} - \frac{1}{2} \quad (54)$$

dengan$\upsilon' = \sqrt{\nu(\nu+1)+m^2} - \frac{1}{2}$

Dimana berturut-turut, *l* merupakan bilangan kuantum orbital, *m* adalah bilangan kuantum magnetik, dan *n* adalah bilangan kuantum radial. Untuk menghindari kekeliruan dengan bilangan kuantum utama, maka untuk bilangan kuantum radial disimbolkan dengan n_r. Sehingga pers.(54) ditulis :

$$l = \sqrt{\left((v' + 1 + n_r)^2 - \frac{\mu^2}{(v'+1+n)^2}\right)} - \frac{1}{2} \qquad (55)$$

Sebagaimana pada bagian radial, persamaan fungsi gelombang bagian polar untuk potensial non-sentral Scarf hiperbolik plus Rosen-Morse trigonometrik ditentukan dengan menggunakan metode operator supersimetri. Dengan mensubtitusikan pers.(41) ke dalam pers.(8) yaitu :

$$\psi_0{}^{(-)}(\theta; a_0) = N\exp\left[-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int^{\theta} W(\theta)d\theta\right]$$

sehingga

$$\psi_0^{(-)}(\theta; a_0) = N \exp\left[-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int^{\theta}\left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left((v' + 1)\cot\theta - \frac{\mu}{(v'+1)}\right)\right)d\theta\right] \qquad (56)$$

dan diperoleh :

$$\psi_0{}^{(-)}(\theta; a_0) = N(\sin\theta)^{(v'+1)}e^{-\frac{\mu}{(v'+1)}\theta} \qquad (57)$$

Persamaan (57) merupakan persamaan umum fungsi gelombang tingkat dasar untuk potensial non-sentral Scarf hiperbolik plus Rosen-Morse trigonometrik bagian polar.

Sedangkan untuk fungsi gelombang tingkat satu ditentukan dengan mengoperasikan operator penaik (A^+) (pers.(9)) ke dalam persamaan gelombang tingkat dasar (pers.(57)) dengan menggunakan pers.(10), yaitu

$$\psi_1^{(-)}(\theta; a_0) = A^+(\theta; a_0)\psi_0^{(-)}(\theta; a_1)$$

maka
$$\psi_1{}^{(-)}(\theta; a_0) = \left[-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{d\theta} + W(\theta)\right]\psi_0{}^{(-)}(\theta; a_1) \qquad (58)$$

sehingga

$$\psi_1{}^{(-)}(\theta; a_0) = \left[-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{d\theta} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left((v' + 1)\cot\theta - \frac{\mu}{(v'+1)}\right)\right]N(\sin\theta)^{(v'+2)}e^{-\frac{\mu}{(v'+2)}\theta} \qquad (59)$$

Dan dengan penjabaran sederhana diperoleh :

$$\psi_1{}^{(-)}(\theta; a_0) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}N\left(\left(\frac{(2v'+3)\mu}{(v'+2)(v'+1)}\right)\sin\theta - (2v' + 3)\cos\theta\right)(\sin\theta)^{(v'+1)}e^{-\frac{\mu}{(v'+2)}\theta} \qquad (60)$$

4. Kesimpulan

Spektrum energi dan fungsi radial diperoleh dari penyelesaian persamaan Schrödinger bagian radial, sedangkan fungsi gelombang bagian sudut dan bilangan kuantum orbital diperoleh dari persamaan Schrödinger bagian sudut polar. Spektrum energi dan bilangan kuantum orbital ditentukan dengan sifat *shape invariance.* Penentuan fungsi gelombang tingkat dasar bagian radial ditentukan dengan sifat *lowering operator* dan fungsi gelombang tereksitasi ditentukan dengan sifat *raising operator.*Baik untuk bagian radial maupun bagian polar ditentukan dengan menggunakan sifat *lowering operator* dan *raising operator*.

Ucapan Terimakasih

Terima kasih kepada Heti yang telah mensupport dan menularkan ilmunya hingga terselesaikan penelitian ini. Tak lupa terima kasih pula pada *saecom community* dan *d'best com* yang selalu setia memberikan spirit tanpa mengenal waktu.

Daftar Acuan

[1] Aktas M.*Exact Solutions to a New Generalized Noncentral Potensial in Three Dimensons*.arXiv:quant-ph/0701063v1 11 Jan 2007

[2] Cari. *Mekanika Kuantum Penyelesaian Potensial Non-Sentral dengan Supersimetri, Hypergeometry,Nikivarov Uvarov, dan Polinomial Romanovski.*Surakarta, Sebelas Maret University Press (2013).

[3] Cari, Suparmi, dan Heti Marini, "Penentuan Spektrum Energi dan Fungsi Gelombang Potensial Morse dengan Koreksi Sentrifugal Menggunakan Metode SWKB dan Operator SUSY," *IndonesianJournal of Applied Physics* (2012) Vol.2 No.2 hal. 112-116.

[4]Cooper, F., Khare, A dan Sukhatme, U.*Supersymetry in Quantum Mekhanics*.World Scientific, Singapure (2001).

[5] Griffiths DJ.*Introduction to Quantum Mechanics.* Prentice Hall, USA (1994).

[6] Ikhdair SM, dan Sever R.*Polynomial Solution of Non-Central Potentials,* arXiv:quant-ph/0702186v1 19 Feb 2007

[7] Khare A, dan Bhaduri RK. Supersymmetry, Shape Invariance and Exactly Solvable Noncentral Potentials, arXiv:hep-th/9310104v1 16 Oct 1993

[8] Mandel BM. "Path Integral Solution of Noncentral Potential," *International Journal of Modern Physics A*, Vol. 15, No. 9, 2000, pp. 1225-1238.

[9] Rodrigues, R. D. L.*The Quantum Mechanics SUSY algebra: An Introductory Review.*(2002),CBPF-MO-003/01

[10] Sadeghi J. Factorization Method and Solution of the Non-Central Modifed Kratzer Potential, *Acta Physica Polonica,* Vol. 112 (2007)*, A* No. 1

[11] Suparmi.*Mekanika Kuantum II*. Surakarta,Jurusan Fisika FMIPA Universitas Sebelas Maret.(2011).

[12]Tjia, M.O, *Mekanika Kuantum.*Bandung, ITB (1999), hal 7a-9a

[13]Witten E .Dynamical Breaking of Supersymmetry, *Nucl. Phys.*(1981)B185,513-554