

Analisis Persamaan Dirac untuk Potensial Pöschl-Teller Trigonometrik dan Potensial Scarf Trigonometrik pada Kasus Spin Simetri Bagian Radial menggunakan Metode Iterasi Asimtotik

Dya Qurotul A'yun¹, Suparmi², Cari²

Universitas Sebelas Maret, Surakarta
Jalan Ir. Sutami 36A Ketingan, Surakarta 57126
Email¹ : dyaayun@yahoo.co.id

Abstrak

Persamaan Dirac untuk potensial Pöschl-Teller Trigonometrik dan Potensial Scarf Trigonometrik pada kasus spin simetri bagian radial diselesaikan dengan menggunakan metode Iterasi Asimtotik atau Asymptotic Iteration Method (AIM). Penyelesaian pada kasus ini dengan mengkombinasikan dua potensial lalu disubstitusikan ke persamaan Dirac, kemudian dilakukan pemisahan variabel menjadi bagian radial. Persamaan bagian radial diselesaikan dengan mereduksi menjadi persamaan perantara hipergeometri dan dilanjutkan dengan menyelesaikan menggunakan AIM. Energi relativistik sistem dihitung menggunakan software Matlab 2011. Penelitian ini dibatasi untuk kasus spin simetri bagian radial.

Kata kunci: *Persamaan Dirac, potensial Pöschl-Teller Trigonometrik, potensial Scarf Trigonometrik, metode Iterasi Asimtotik, dan spin simetri*

Abstract

The Dirac equation for Pöschl-Teller Trigonometric potential and Scarf Trigonometric potential in case spin symmetric of radial is solved using asymptotic iteration method (AIM). The combination of two potential is substituted into the Dirac equation, then the separation of variables into radial part. Radial part equation solved by reducing it to the hypergeometric intermediaries equation and continued with resolved to follow the asymptotic iteration method. The relativistic energy calculated using Matlab 2011. This study is limited to the case of spin symmetry radial section.

Key words: *Dirac equation, Trigonometric Pöschl-Teller potential, Trigonometric Scarf potential, Asymptotic Iteration Method (AIM), and spin symmetry*

I. PENDAHULUAN

Perkembangan IPTEK yang semakin maju mendorong peneliti fisika melakukan inovasi penelitian yang terkait dengan mekanika kuantum^[1]. Fungsi gelombang dan tingkat energi suatu partikel mampu mendeskripsikan besarnya energi, momentum partikel, dan perilaku partikel sebagai gelombang. Persamaan Dirac menjadi sangat penting untuk menjelaskan mengenai model atom yang memiliki banyak elektron^[2].

Pada tahun 1928, Dirac meneliti persamaan gelombang kovarian relativistik dari persamaan schrodinger dan energi relativistiknya. Dari hubungan energi relativistik akan didapatkan persamaan Dirac^[3]. Pada kasus tertentu persamaan Dirac mendeskripsikan gerak sebuah partikel spin $\frac{1}{2}$

yang digunakan untuk menyelesaikan persoalan nuklir dan fisika energi tinggi^[4].

Penyelesaian persamaan Dirac dengan menentukan energi dan fungsi gelombang suatu partikel yang dipengaruhi oleh potensial^[5]. Spin dan pseudospin simetri pada Hamiltonian Dirac telah ditemukan beberapa tahun lalu. Dalam kerangka persamaan Dirac, spinsimetri dihubungkan dengan pembahasan meson^[6]. Konsep spin dan pseudospin simetri diperkenalkan pada teori nuklir dan digunakan untuk menjelaskan ciri deformasi dan super deformasi inti, dan untuk membuktikan sebuah skema kulit model kopling yang efektif^[7].

Dalam beberapa tahun terakhir, persamaan Dirac telah banyak diteliti. Analisis persamaan Dirac dengan menggunakan metode SUSY, Nikorov-Uvarov, dan Polinomial Romanovski telah selesai

diteliti. Paper ini menggunakan metode yang berbeda dengan penelitian yang telah dilaksanakan. Paper ini membahas penyelesaian persamaan Dirac untuk potensial Poschl Teller Trigonometrik dan potensial Scarf Trigonometrik pada kasus spin simetri bagian radial menggunakan metode Iterasi Asimtotik atau *Asymptotic Iteration Method* (AIM).

II. METODE ITERASI ASIMTOTIK (AIM)

Metode iterasi asimtotik digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial homogen linier orde kedua yaitu

$$y_n'' = \lambda_0(x)y_n'(x) + s_0(x)y_n(x) \tag{1}$$

dimana $\lambda_0(x) \neq 0$ dan turunan pertama menunjukkan hubungan dengan x , parameter lain yaitu n diartikan sebagai sebuah bilangan kuantum radial^[9]. Variabel $s_0(x)$ dan $\lambda_0(x)$ cukup mudah diturunkan. Untuk memperoleh sebuah solusi umum pada persamaan ini, kita mendefrensialkan Persamaan (1) yang bergantung terhadap x , kita peroleh

$$y_n''' = \lambda_1(x)y_n'(x) + s_1(x)y_n(x) \tag{2}$$

dimana

$$\lambda_1(x) = \lambda_0'(x) + s_0(x) + \lambda_0^2(x) \tag{3}$$

$$s_1(x) = s_0'(x) + s_0(x)\lambda_0(x) \tag{4}$$

Dengan $\lambda_0(x) \neq 0$ dan $s_0(x)$ merupakan fungsi dari C^∞ (koefisien persamaan diferensial) Metode iterasi asimtotik dapat diaplikasikan secara langsung pada beberapa permasalahan jika sebuah fungsi gelombang diketahui terlebih dahulu dan memenuhi kondisi batas nol (0) dan tak hingga (∞)^[8].

Persamaan (1) dapat dengan mudah diiterasikan sampai $(k+1)$ dan $(k+2)$, $k = 1,2,3, \dots$ sehingga diperoleh

$$y_n^{(k+1)}(x) = \lambda_{k-1}(x)y_n'(x) + s_{k-1}(x)y_n(x) \tag{5}$$

$$y_n^{(k+2)}(x) = \lambda_k(x)y_n'(x) + s_k(x)y_n(x) \tag{6}$$

dimana

$$\lambda_k(x) = \lambda_{k-1}'(x) + s_{k-1}(x) + \lambda_{k-1}(x)\lambda_{k-1}(x) \tag{7}$$

$$s_k(x) = s_{k-1}'(x) + s_{k-1}(x)\lambda_{k-1}(x) \tag{8}$$

yang mana disebut dengan *recurrence relation*. Dari rasio $(k+1)$ dan $(k+2)$, kita dapatkan persamaan berikut

$$\frac{d}{dz} \ln \left[\frac{y_n^{(k+2)}(z)}{y_n^{(k+1)}(z)} \right] = \frac{y_n^{(k+2)}(z)}{y_n^{(k+1)}(z)} = \frac{\lambda_k(z) \left[y_n'(z) + \frac{s_k(z)}{\lambda_k(z)} f(z) \right]}{\lambda_{k-1}(z) \left[y_n'(z) + \frac{s_{k-1}(z)}{\lambda_{k-1}(z)} f(z) \right]} \tag{9}$$

Untuk sufficiently large k , jika

$$\frac{s_k(z)}{\lambda_k(z)} = \frac{s_{k-1}(z)}{\lambda_{k-1}(z)} = \alpha(z) \tag{10}$$

yang mana adalah aspek metode asimptotik, kemudian kita substitusikan

$$\frac{d}{dz} \ln \left[\frac{y_n^{(k+1)}(z)}{y_n^{(k)}(z)} \right] = \frac{\lambda_k(z)}{\lambda_{k-1}(z)} \tag{11}$$

$$y_n^{(k+1)}(z) = C_1 \exp \left(\int \frac{\lambda_k(z)}{\lambda_{k-1}(z)} dz \right) = C_1 \lambda_{k-1}(z) \exp \left(\int [\alpha(z) + \lambda_0(z)] dz \right) \tag{12}$$

$$y_n'(z) + \alpha(z)f(z) = C_1 \exp \left(\int [\alpha(z) + \lambda_0(z)] dz \right) \tag{13}$$

$$y_n(z) = \exp \left(- \int \alpha(z_1) dz_1 \right) \left[C_2 + C_2 \int \exp \left(\int [\lambda_0(z_2) + 2\alpha(z_2)] dz_2 \right) dz_2 \right] \tag{14}$$

$$\Delta_k(z) = \lambda_k(z)s_{k-1}(z) - \lambda_{k-1}(z)s_k(z) = 0 \tag{15}$$

$k = 1,2,3, \dots$

$$y_n(z) = C_2 \exp \left(- \int \frac{s_n(z_1)}{\lambda_n(z_1)} dz_1 \right) \tag{16}$$

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan Dirac untuk kasus spin simetri berlaku bahwa selisih antara potensial vektor $V(r)$ dan potensial skalar $S(r)$ adalah konstan, dan jumlahnya sama dengan potensial yang mempengaruhi sistem.

Persamaan Dirac untuk sebuah partikel tunggal dengan massa M pada sebuah potensial skalar $S(r)$ dan potensial vektor $V(r)$ dapat dinyatakan dalam $\hbar = c = 1$.

$$\{c\alpha \cdot p + \beta(Mc^2 + S(r))\}\psi(r) = \{E - V(r)\}\psi(r) \tag{17}$$

dimana M adalah massa relativistik partikel, E adalah energi total, dan \vec{p} adalah operator momentum linear, nilai α dan β dinyatakan dalam persamaan berikut.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I \end{pmatrix} \quad (19)$$

Dengan σ adalah matrik Pauli, I adalah matrik identitas 2x2.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Dan spin Dirac dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\psi(r) = \begin{pmatrix} \zeta(r) \\ \varphi(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_{nk}(r)}{r} Y_{jm}^l(\theta, \varphi) \\ i \frac{G_{nk}(r)}{r} Y_{jm}^{\bar{l}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \quad (21)$$

dimana $F_{nk}(r)$ adalah komponen spin Dirac *upper* dan $G_{nk}(r)$ adalah komponen pseudo spin Dirac *lower*. $Y_{jm}^l(\theta, \varphi)$ adalah spin bola harmonik dan $Y_{jm}^{\bar{l}}(\theta, \varphi)$ adalah pseudo spin bola harmonik, l adalah bilangan kuantum orbital biasa dan \bar{l} adalah bilangan kuantum pseudo-orbital, m adalah proyeksi momentum sudut pada sumbu z.

Dengan mensubstitusikan Persamaan (21) ke Persamaan (17), maka diperoleh

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right) F_{nk}(r) = (M + E_{nk} - \Delta(r)) F_{nk}(r) \quad (22)$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r}\right) G_{nk}(r) = (M - E_{nk} + \Sigma(r)) G_{nk}(r) \quad (23)$$

Setelah dieliminasi $F_{nk}(r)$ dan $G_{nk}(r)$ dari Persamaan (22) dan Persamaan (23), kita peroleh dua persamaan diferensial yang mirip dengan persamaan Schrödinger untuk komponen $F_{nk}(r)$ dan komponen $G_{nk}(r)$ sebagai berikut:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2}\right) F_{nk}(r) + \frac{\frac{d\Delta(r)}{dr}}{M + E_{nk} - \Delta(r)} \left(\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right) F_{nk}(r)\right) = [(M + E_{nk} - \Delta(r))(M - E_{nk} + \Sigma(r))] F_{nk}(r) \quad (24)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k-1)}{r^2}\right) G_{nk}(r) + \frac{\frac{d\Sigma(r)}{dr}}{M + E_{nk} - \Sigma(r)} \left(\left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r}\right) G_{nk}(r)\right) = [(M + E_{nk} - \Delta(r))(M - E_{nk} + \Sigma(r))] G_{nk}(r) \quad (25)$$

dimana,

$$\Delta(r) = V(r) - S(r) \quad (26)$$

$$\Sigma(r) = V(r) + S(r) \quad (27)$$

2.1 Analisis Persamaan Dirac untuk Potensial Pöschl-Teller Trigonometrik dan potensial Scarf Trigonometrik pada Kasus Spin Simetri Bagian Radial

Persamaan Dirac untuk kasus spin simetri ditandai dengan $\frac{d\Delta(r)}{dr} = 0$ dan $\Delta(r) = \text{konstan} = C$, sehingga persamaannya menjadi^[10]:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M + E_{nk} - C)(M - E_{nk} + \Sigma(r))\right) F_{nk}(r) = 0 \quad (28)$$

Kita misalkan bahwa $\Sigma(r)$ adalah potensial Poschl Teller Trigonometrik yang mana didefinisikan sebagai :

$$V(r) = \frac{A}{\sin^2(ar)} + \frac{B}{\cos^2 ar} \quad (29)$$

Dan juga memisalkan $\frac{1}{r^2}$ dengan $\frac{1}{r^2} \cong \frac{\alpha^2}{\sin^2 ar}$

maka diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{\sin^2 ar} \left(\frac{a^2 k(k+1) + (M + E_{nk} - C)A - (M + E_{nk} - C)\frac{B}{\cos^2 ar} - (M + E_{nk} - C)(M - E_{nk})}{\cos^2 ar}\right) F_{nk}\right] = 0 \quad (30)$$

Dengan : $A_s = \kappa(\kappa + 1) + (M + E_{nk} - C)A$ (31)

$$B_s = \frac{B(M + E_{nk} - C)}{\alpha^2} \quad (32)$$

$$E' = \frac{(M + E_{nk} - C)(M - E_{nk})}{\alpha^2} \quad (33)$$

Dengan mensubstitusikan variabel $\cos^2 ar = s$ pada Persamaan (30) dimana $-\infty < s < \infty$, kita dapatkan

$$s(1-s) \frac{\partial^2 F_{nk}}{\partial s^2} + \left(\frac{1}{2} - s\right) \frac{\partial F_{nk}}{\partial s} + \left(\frac{A_s}{4(1-s)} + \frac{B_s}{4s} + \frac{E'_s}{4}\right) F_{nk} = 0 \quad (34)$$

Untuk memecahkan persamaan ini kita menggunakan persamaan berikut :

$$F_{nk} = s^\alpha (1-s)^\beta f(s) \quad (35)$$

Setelah memanipulasi Persamaan (34) dan (35), kita dapatkan

$$f'(s) = \frac{[(2\alpha + 2\beta + 1)s - (2\alpha + \frac{1}{2})]}{s(1-s)} f'(s) + \frac{[(\alpha + \beta)^2 - \frac{E'_s}{4}]}{s(1-s)} f(s) \quad (36)$$

Persamaan (36) merupakan persamaan differensial orde dua, dimana nilai $B_s = -4\alpha^2 + 2\alpha$ dan $A_s = -4\beta^2 + 2\beta$.

Dengan membandingkan dengan Persamaan (1), kita dapat menuliskan $\lambda_0(s)$ dan $s_0(s)$. Kemudian kita dapat menghitung $\lambda_k(s)$ dan $s_k(s)$.

$$\lambda_0(s) = \frac{(2\alpha + 2\beta + 1)s - (2\alpha + \frac{1}{2})}{s(1-s)}$$

$$s_0(s) = \frac{(\alpha + \beta)^2 - \frac{E_s'}{4}}{s(1-s)}$$

$$\lambda_1(s) = \frac{(2\alpha + \frac{1}{2})}{s^2} + \frac{(2\beta + \frac{1}{2})}{(1-s)^2} + \left(\frac{D}{s} + \frac{D}{(1-s)}\right) + \left\{ -\frac{(2\alpha + \frac{1}{2})}{s} + \frac{(2\beta + \frac{1}{2})}{(1-s)} \right\}^2$$

(37)

$$s_1(s) = \frac{-D}{s^2} + \frac{D}{(1-s)^2} + \left(\frac{D}{s} + \frac{D}{(1-s)}\right) \left(-\frac{(2\alpha + \frac{1}{2})}{s} + \frac{(2\beta + \frac{1}{2})}{(1-s)} \right)$$

Dengan mengkombinasikan hasil di atas dengan Persamaan (15), maka diperoleh

$$s_0\lambda_1 - s_1\lambda_0 = 0 \rightarrow$$

$$\Delta_1 = \left[\frac{(\alpha + \beta)^2 - \frac{E_s'}{4}}{s(1-s)} \right] \left[\frac{((2\alpha + 2\beta + 1) + (\alpha + \beta)^2 - \frac{E_s'}{4})(s - s^2)}{s^2(1-s)^2} \right]$$

$$s_1\lambda_2 - s_2\lambda_1 = 0 \rightarrow$$

$$\Delta_2 = \left[\frac{(\alpha + \beta)^2 - \frac{E_s'}{4}}{s(1-s)} \right] \left[\frac{(2\alpha + 2\beta + 1) + (\alpha + \beta)^2 - \frac{E_s'}{4}}{s^2(1-s)^2} \right]$$

$$\left[\frac{((4\alpha + 4\beta + 4) + (\alpha + \beta)^2 - \frac{E_s'}{4})(s - s^2)}{s^3(1-s)^3} \right]$$

$$\varepsilon_1 = (\alpha + \beta + 1)^2$$

(38)

$$s_2\lambda_3 - s_3\lambda_2 = 0 \rightarrow$$

$$\Delta_3 = \left[\frac{(\alpha + \beta)^2 - \frac{E_s'}{4}}{s(1-s)} \right] \left[\frac{((2\alpha + 2\beta + 1) + (\alpha + \beta)^2 - \frac{E_s'}{4})(s - s^2)}{s^2(1-s)^2} \right]$$

$$\left[\frac{((4\alpha + 4\beta + 4) + (\alpha + \beta)^2 - \frac{E_s'}{4})(s - s^2)}{s^3(1-s)^3} \right]$$

$$\left[\frac{((6\alpha + 6\beta + 9) + (\alpha + \beta)^2 - \frac{E_s'}{4})(s - s^2)}{s^4(1-s)^4} \right]$$

$$\varepsilon_2 = (\alpha + \beta + 2)^2$$

(39)

$$\varepsilon_3 = (\alpha + \beta + 3)^2$$

(40)

Dengan

$$\varepsilon = \frac{(M^2 - E^2)}{4a^2}$$

(41)

Dari persamaan (38), (39), (40) dapat digeneralisasikan menjadi

$$\varepsilon = (\alpha + \beta + n_r)^2$$

(42)

Nilai α adalah

$$\alpha = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(B(M + E_{nk} - C)) - \frac{1}{4}}$$

(43)

Dan nilai β adalah

$$\beta = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\kappa(\kappa + 1) + (M + E_{nk} - C)A) - \frac{1}{4}}$$

(44)

Dengan mensubstitusikan persamaan (43) dan Persamaan (44) ke dalam persamaan (42) diperoleh nilai eigen values yaitu sebesar

$$\varepsilon = \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{(B(M + E_{nk} - C)) - \frac{1}{4}} \right. \\ \left. \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\kappa(\kappa + 1) + (M + E_{nk} - C)A) - \frac{1}{4}} + n_r \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \right)^2$$

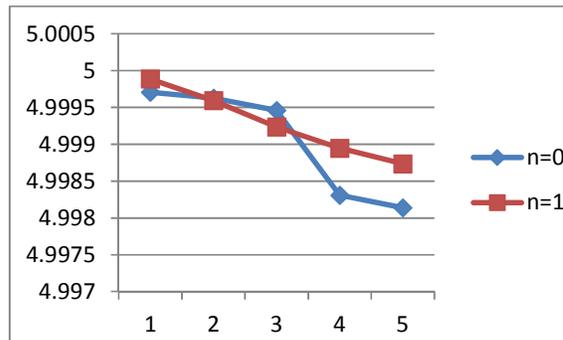
.... (45)

Hasil energi yang diperoleh untuk kasus spin simetri dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Spektrum energi kombinasi potensial Poschl Teller Trigonometrik dan potensial Scarf Trigonometrik untuk kasus spin simetri dengan $M = 1$; $C_s = 5$; $A = 1$; $B = -1$ dan $\alpha = 0,01$.

Untuk $B = 1$			En_k
l	n	k	
1	0	4	4,999709
2	0	5	4,999594
3	0	6	4,999461
4	0	7	4,998308
5	0	8	4,998136
1	1	4	4,999886
2	1	5	4,999627
3	1	6	4,999236
4	1	7	4,998946
5	1	8	4,998736

Dari hasil energi pada Tabel 1, dapat digambarkan grafiknya seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Hasil perhitungan spektrum energi untuk kasus spin simetri pada n tertentu, kombinasi potensial Poschl Teller Trigonometrik dan potensial Scarf Trigonometrik bagian radial

IV. KESIMPULAN

Persamaan Dirac untuk potensial Pöschl-Teller Trigonometrik dan potensial Scarf Trigonometrik pada kasus spin simetri bagian radial dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Iterasi Asimtotik (AIM). Hasil energi dengan pada kasus spin simetri bernilai positif, semakin besar n maka nilai energinya juga semakin besar. Semakin besar nilai κ maka nilai energi juga semakin besar. Grafik energi bisa dilihat pada gambar 1, hasil perhitungan energi dengan menggunakan program matlab 2011.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didukung oleh Hibah Penelitian Utama (PUT UNS) 2014 dan DIKTI No. kontrak 351/UN27.11/PN/2014

PUSTAKA

- [1] Suparmi, *Mekanika Kuantum II*, Jurusan Fisika Fakultas MIPA, Universitas Sebelas Maret Surakarta, 2011.
- [2] Suparmi, *Mekanika Kuantum I*, Jurusan Fisika Fakultas MIPA, Universitas Sebelas Maret Surakarta, 2011.
- [3] Greiner, W. 2000. *Relativistic Quantum Mechanics Third Edition*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- [4] M. Hamzavi., A. A. Rajabi. Spin and Pseudospin Symmetries with Trigonometric Pöschl-Teller Potential including Tensor Coupling. *Advances in High Energy Physics.*, vol. 2013, no. 196986.
- [5] Oktay Aydoğdu, Ramazan Sever. Exact Pseudospin Symmetric Solution of The Dirac Equation for Pseudoharmonic Potential in the Presence of Tensor Potential. *Few-Body Syst.*, Issue 47, 2010, pp. 193-200.
- [6] M. Hamzavi., S.M. Ikhdair., K.-E.Thylwe. Spin and Pseudospin Symmetries in Relativistic Trigonometric Pöschl-Teller Potential with Centrifugal Barrier. *International Journal of Modern Physics E*, vol. 21, no. 12, 2012.
- [7] Xu-Yang Liu, Gao-Feng Wei, Xin-Wei Cao. Spin Symmetry for Dirac Equation with the Trigonometric Pöschl-Teller Potential. *Int J Theor Phys.* no. 49, 2010, pp. 343-348.
- [8] Ozer. O.. Solution of a Novel Quasi-Exactly Solvable Potential via Asymptotic Iteration Method. *Progress of Theritical Physics*, vol. 121, no. 3, 2008, pp. 437-443.
- [9] Rostami, A. Asymptotic Iteration Method: A Powerful Approach for Analysis of Inhomogeneous Dielectric Slab Waveguides. *Progress in Electromagnetics Research*, vol. 4, 2008, pp. 171-182.
- [10] Soylu, A. Bayrak, O. Boztosun, I. 2007. An approximate solution of Dirac Hulthén problem with pseudospin and spin symmetry for any k state. *Journal of Mathematical Physics* 48.