JSA

Volume 6 Issue 1,
June 2022

e-ISSN: 2620-8369

Received: 26 April 2022
Revised: 12 June 2022
Accepted: 27 June 2022
Published: 30 June 2022

Model Kredibilitas Bühlmann Dengan Risiko Bersama

Muhammad Imanudin Saputra[1, a)], Siti Nurrohmah [1, b)], Ida Fithriani [1, c)]

[1]*Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia, Depok*

Email: [a)]muhammad.imanudin@sci.ui.ac.id, [b)]snurrohmah@sci.ui.ac.id, [c)]ida.f @sci.ui.ac.id

Abstract

Insurance service provider cover policy holder's risk by paying requested claim. In exchange for the risk coverage, policy holder needs to pay some premiums to the insurance service provider. Therefore, it is necessary to predict the amount of requested claim, so that the amount of premium needs to be paid by policy holder can be determined. One of the tools to predict the amount of claim is credibility theory. Credibility theory allows insurance service provider to use past information of requested claim amount and combine it with another information called manual rate for predicting claim amount of policy holder in the next period. One credibility model developed is Bühlmann credibility model. Bühlmann credibility model assumes that risks between individuals are independent. However, this assumption is violated in some cases. Furthermore, Bühlmann credibility model use squared error loss function to find the model credibility estimator. In this research, by using orthogonal projection, credibility estimator for Bühlmann model which consider dependency of risks between individuals, explained by a common risk, and using loss function in the form of balanced loss function (BLF). Using sample data that meets the model assumptions, the results obtained show that by adjusting the weights of the BLF, different values of precision and goodness of fit of estimation can be obtained.

Keywords: Balanced Loss Function, Credibility Theory, Goodness of Fit, Precision, Risk Parameter.

Abstrak

Penyedia jasa asuransi dalam praktiknya menanggung risiko pemegang polis dengan membayarkan klaim yang diajukan oleh pemegang polis. Sebagai gantinya, pemegang polis perlu membayarkan premi kepada penyedia jasa asuransi. Oleh karena itu diperlukan prediksi besar klaim yang akan diajukan sehingga dapat ditentukan juga besar premi yang perlu dibayarkan oleh pemegang polis. Salah satu cara untuk memprediksi besar klaim adalah dengan menggunakan teori kredibilitas. Teori kredibilitas memungkinkan penyedia jasa asuransi untuk menggunakan informasi dari pengalaman klaim seorang individu dengan informasi lainnya berupa manual rate dalam memprediksi besar klaim di masa yang akan datang. Salah satu model yang dikembangkan dalam teori kredibilitas adalah model kredibilitas Bühlmann. Pada model kredibilitas Bühlmann, diasumsikan risiko antara individu saling independen. Namun dalam beberapa kasus asumsi tersebut tidak terpenuhi. Selain itu, model kredibilitas Bühlmann menggunakan fungsi kerugian berupa *squared error loss function* untuk mendapatkan estimator kredibilitas model. Pada penelitian ini dijelaskan pembentukan estimator kredibilitas model kredibilitas Bühlmann yang memperhitungkan dependensi risiko antara individunya yang dijelaskan oleh suatu parameter risiko bersama dengan menggunakan proyeksi orthogonal dan fungsi kerugian berupa *balanced loss function* (BLF). Dengan menggunakan data yang memenuhi asumsi model, dapat diperoleh besar presisi dan *goodness of fit* dari estimasi klaim yang berbeda-beda dengan mengatur bobot pada BLF.

Kata-kata kunci: *Balanced loss function*; *goodness of fit*; parameter risiko; presisi; teori kredibilitas.

PENDAHULUAN

Dalam praktik asuransi, penyedia jasa asuransi perlu menentukan besarnya premi yang akan dibayarkan oleh pemegang polis. Salah satu cara perhitungan premi adalah dengan menggunakan teori kredibilitas. Teori kredibilitas memungkinkan perhitungan premi menggunakan informasi pengalaman klaim yang ada. Teori kredibilitas yang pertama kali dikenalkan adalah *limited fluctuation credibility theory* dan dikemukakan oleh Mowbray (1914) di dalam makalahnya mengenai kompensasi asuransi pekerja. Selanjutnya teori kredibilitas yang dikembangkan yaitu *greatest accuracy credibility theory* dan salah satu modelnya adalah model kredibilitas Bühlmann. Model kredibilitas Bühlmann mengasumsikan bahwa klaim antar individu saling bebas/independen.

Pada kenyataannya terdapat beberapa kasus dimana asumsi pada model kredibilitas Bühlmann tidak berlaku, misalnya adalah klaim antara individu dapat saling dependen. Sebagai contoh, Yeo & Valdez (2006) memberikan ilustrasi asuransi kendaraan dimana setiap pengendara memiliki karakteristik individu tertentu seperti kecenderungan berkendara melebihi batas kecepatan. Karakteristik individu tersebut dijelaskan oleh parameter Θ_i. Pengendara-pengendara tersebut mungkin tinggal di daerah yang sama dengan tingkat kriminalitas atau kondisi lalu lintas tertentu yang dapat mempengaruhi pengajuan besar klaim. Faktor tersebut akan dijelaskan oleh parameter Λ. Dalam hal ini Λ dikatakan sebagai parameter yang menjelaskan dependensi klaim antara individu. Selanjutnya, dalam penelitian ini Λ akan disebut juga sebagai risiko bersama.

Dalam model kredibilitas Bühlmann, digunakan fungsi kerugian berupa *squared error loss function* untuk mendapatkan estimator kredibilitas model. Fungsi kerugian (*loss function*) sendiri merupakan fungsi non-negatif yang merefleksikan selisih antara nilai parameter dengan nilai estimasi titiknya (Hogg et.al, 2019). Pada umumnya, fungsi kerugian hanya menggambarkan satu kriteria yang diinginkan, misalnya presisi atau *goodness of fit*. Zellner (1994) pertama kali memperkenalkan *Balanced Loss Function* (BLF) yang memperhitungkan presisi dan *goodness of fit* secara bersamaan. Bentuk umum dari BLF selanjutnya digunakan oleh Weizhong & Xianyi (2012) dalam pembentukan model kredibilitas Bühlmann dan Bühlmann-Straub yang mempertimbangkan dependensi risiko antara individunya dengan menambahkan parameter risiko bersama.

Dalam penelitian ini, akan dilakukan analisis mengenai pembentukan estimator model kredibilitas Bühlmann dengan risiko bersama yang memperhitungkan dependensi klaim antara individunya. Fungsi kerugian yang akan digunakan dalam pembentukan model adalah BLF. Selain itu, pada penelitian ini akan digunakan estimasi tak bias dari parameter model yang dijelaskan oleh Ebrahimzadeh, M, *et.al* (2012) untuk memberikan perhitungan contoh numerik menggunakan data yang dibangkitkan dan memenuhi asumsi model.

METODOLOGI

Bahan dan Data

Data yang digunakan akan mengikuti asumsi dari data yang digunakan oleh Yeo & Valdez (2006) dalam mengestimasi premi kredibilitas. Adapun data simulasi yang akan digunakan berbeda pada jumlah portofolionya, yaitu sebanyak $R = 5$ portofolio. Setiap portofolio terdiri dari $K = 10$ individu dengan masing-masing individu memiliki data pengalaman klaim selama $n = 10$ periode. Namun, untuk tujuan perbandingan hasil prediksi dengan data klaim yang sebenarnya, data klaim yang dibangkitkan adalah sebanyak 11 periode untuk setiap individunya. Klaim pada periode ke-1 sampai ke-10 akan digunakan sebagai data pengalaman klaim untuk memprediksi klaim pada periode ke-11, sedangkan data klaim pada periode ke-11 yang sudah ada akan dibandingkan dengan klaim hasil estimasi dari model yang digunakan.

Metode Penelitian

Balanced Loss Function

Fungsi kerugian yang biasanya digunakan hanya merefleksikan salah satu kriteria saja, seperti presisi atau *goodness of fit*. Ketika digunakan fungsi kerugian berupa *squared error loss function*, terkadang yang diperhatikan adalah presisinya, sehingga didapatkan estimator yang bias namun dengan presisi yang baik. Adapun dalam hal ini, *goodness of fit* yang dimaksud adalah seberapa baik model yang didapat *fit* dengan data observasi. Ukuran dari *goodness of fit* biasanya dilihat dengan mengukur perbedaan antara nilai sebenarnya dengan nilai estimasi berdasarkan model yang digunakan.

Untuk mengukur dua kriteria secara bersamaan, dapat digunakan fungsi kerugian berupa *balanced loss function* (BLF). Penggunaan BLF pertama kali dikenalkan oleh Zellner (1994) yang menekankan pada pengukuran *goodness of fit* dari model dan presisi dari suatu estimator secara bersamaan. Bentuk dari BLF yaitu:

$$\mathcal{L}[\hat{\theta},\theta] = \frac{\omega}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\hat{\theta}\right)^2 + (1-\omega)\left(\theta-\hat{\theta}\right)^2 \quad (1)$$

$$= \frac{\omega}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + \omega\left(\bar{X}-\hat{\theta}\right)^2 + (1-\omega)\left(\theta-\hat{\theta}\right)^2, \quad (2)$$

dimana ω adalah bobot dengan $\omega \in [0,1]$, $\bar{X}$ adalah rata-rata sampel $X_1, X_2, \ldots, X_n$, θ adalah parameter yang ingin dicari, dan $\hat{\theta}$ adalah estimator dari parameter θ yang akan ditentukan dengan meminimumkan fungsi kerugian $\mathcal{L}$. Pada persamaan (1), komponen pertamanya mengukur *goodness of fit*, sedangkan komponen keduanya mengukur presisi estimator dari θ.

Berdasarkan persamaan (2) dapat diperoleh bentuk umum dari BLF sebagai berikut:

$$\mathcal{L}_{\rho,\omega,\delta_0}[\theta,\delta] = \omega\rho(\delta_0,\delta) + (1-\omega)\rho(\theta,\delta) \quad (3)$$

dimana ω adalah bobot dengan $\omega \in [0,1]$, ρ adalah sembarang fungsi kerugian, δ_0 adalah target *prior* dari estimator θ, dan δ adalah estimator dari θ yang akan ditentukan dengan meminimumkan fungsi kerugian $\mathcal{L}_{\rho,\omega,\delta_0}$.

Teori Kredibilitas

Dalam model premi kredibilitas, besar klaim pada periode berikutnya diestimasi menggunakan *hypothetical mean* ($\mu(\theta_i)$), yaitu $E\left[X_{i,n+1}|\Theta_i\right]$ dengan $X_{i,j}$ adalah klaim individu ke-i pada periode ke-j. *Hypothetical mean* ditaksir menggunakan fungsi linier dari data pengalaman klaim dalam bentuk persamaan $a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_{ij}$. Selanjutnya, perlu dicari nilai dari konstanta $a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{in}$ yang meminimumkan selisih antara $\mu(\theta_i)$ dan $a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_{ij}$. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, digunakan fungsi kerugian berupa *squared error loss function*. Sehingga dicari nilai minimum dari fungsi risikonya dalam Persamaan (4), dimana Q disebut juga sebagai *mean squared error* (MSE). Solusi dari Persamaan (4) merupakan estimator model premi kredibilitas dan diberikan pada Persamaan (5)

$$\min Q = \min\left(E\left\{\left(\mu(\theta_i) - a_{i,0} - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}X_{i,j}\right)^2\right\}\right). \quad (4)$$

$$\hat{a}_{i,0} + \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{i,j}X_{i,j} = \frac{(1-\rho)\mu}{1-p+np} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho}{1-\rho+n\rho}X_{i,j} = (1-Z)\mu + Z\bar{X}. \quad (5)$$

dengan memisalkan $E(X_{i,j}) = \mu$, $Var(X_{i,j}) = \sigma^2$, dan $Cov(X_{i,j}, X_{i,k}) = \rho\sigma^2$ untuk $j \neq k$ dan ρ merupakan koefisien korelasi dengan nilai $[-1,1]$.

Model kredibilitas Bühlmann mengasumsikan bersyarat parameter risiko individu Θ_i, besar klaim individu antara periodenya memiliki besar mean dan variansi yang sama, dan i.i.d (*independent, identically distributed*). Selain itu, diasumsikan juga klaim maupun parameter risiko individunya saling independen untuk individu yang berbeda. Dengan memanfaatkan solusi yang diperoleh pada model premi kredibilitas, akan didapatkan estimator kredibilitas model Bühlmann pada Persamaan (6) (Klugman, et.al 2019), dengan $Z = \frac{na}{v+na} = \frac{n}{n+(v/a)}$, $\mu = E[E(X_{i,j}|\Theta_\mathrm{i} = \theta_i)]$, $v = E[Var(X_{i,j}|\Theta_\mathrm{i} = \theta_i)]$, dan $a = Var[E(X_{i,j}|\Theta_\mathrm{i} = \theta_i)]$:

$$\hat{a}_{i,0} + \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{i,j}X_{i,j} = (1-Z)\mu + Z\bar{X}_i, \quad (6)$$

Proyeksi Orthogonal

Salah satu cara untuk mendapatkan estimator kredibilitas adalah dengan menggunakan proyeksi orthogonal (Bühlmann & Gisler, 2005). Dalam kasus ini, digunakan proyeksi orthogonal di $L(\boldsymbol{X}, 1)$ yang merupakan subruang dari ruang Hilbert $\mathcal{L}^2$, dimana $\mathcal{L}^2$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}^2 = \{X : X \text{ adalah variabel acak dengan } E[X^2] < \infty\}.$$

Penjelasan mengenai $\mathcal{L}^2$ sebagai ruang Hilbert dapat dilihat lebih jelas pada tulisan Fristedt B. & Gray L. (1996).

$L(\boldsymbol{X}, 1)$ berisi semua kemungkinan estimator dari *hypothetical mean* atau dituliskan sebagai berikut:

$$L(\boldsymbol{X}, 1) = \left\{\widehat{\mu(\Theta_\iota)} : \widehat{\mu(\Theta_\iota)} = a_0 + \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}X_{i,j}\, , a_0, \dots, a_{K,n} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots K\right\}.$$

Karena ingin dicari nilai selisih yang terdekat antara estimator *hypothetical mean* dengan nilai sesungguhnya, maka akan digunakan proyeksi orthogonal, dimana proyeksi orthogonal memberikan jarak minimum dengan objek yang diproyeksikannya. Dalam hal ini proyeksi orthogonal di $L(\boldsymbol{X}, 1)$ akan memberikan estimator dari *hypothetical mean* yang memiliki MSE terkecil (Anton & Kaul, 2019) atau sama saja seperti hasil pada persamaan (4). Dalam konteks model premi kredibilitas, maka akan dicari nilai dari $\widehat{\mu(\Theta_\iota)}$ yang memiliki jarak terdekat dengan nilai sesungguhnya, yaitu $\mu(\Theta_i)$.

Proyeksi orthogonal dari $\mu(\Theta_i)$ di $L(\boldsymbol{X},1)$ dinotasikan oleh $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_\iota)}} = pro\big(\mu(\Theta_i)\big|L(\boldsymbol{X},1)\big)$. $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_\iota)}}$ memiliki sifat dimana $\langle\mu(\Theta_i) - \widehat{\widehat{\mu(\Theta_\iota)}}, 1\rangle = 0$ dan $\langle\mu(\Theta_i) - \widehat{\widehat{\mu(\Theta_\iota)}}, X_{i,j}\rangle = 0,\ \ i = 1,\dots,K; j = 1,\dots,n$. Selain itu berlaku juga $E\left(\mu(\Theta_i) - \widehat{\widehat{\mu(\Theta_\iota)}}\right) = 0$ dan $Cov\big(\mu(\Theta_i), X_{i,j}\big) = Cov\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_\iota)}}, X_{i,j}\right),\ \ i = 1,..,K; j = 1,\dots,n$. Berdasarkan hal tersebut, estimator kredibilitas $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_\iota)}}$ yang diperoleh menggunakan proyeksi orthogonal di $L(\boldsymbol{X},1)$ adalah

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_\iota)}} = \mu - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}^{-\boldsymbol{1}}(\mu_{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}). \tag{7}$$

dimana $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}} = Cov(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})$ dan mempunyai invers, $\mu_{\boldsymbol{X}} = E(\boldsymbol{X})$, $\mu = E[\mu(\Theta_i)] = E\left[\widehat{\widehat{\mu(\Theta_\iota)}}\right]$, dan $\boldsymbol{c}' = \Big(Cov\big(\mu(\Theta_i), X_{1,1}\big),\dots, Cov\big(\mu(\Theta_\mathrm{i}), X_{K,n}\big)\Big)$.

Pembentukan Estimator Kredibilitas Model Bühlmann dengan Risiko Bersama

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai pembentukan estimator kredibilitas model. Adanya risiko bersama menyebabkan asumsi-asumsi model yang akan digunakan berbeda dengan asumsi-asumsi pada model Bühlmann standar. Berikut adalah asumsi-asumsi mdoelnya:

i. Variabel acak Λ mempunyai nilai ekspektasi yang diketahui yang dinotasikan oleh $E(\Lambda) = \mu_\lambda$ dan variansi yang diketahui yang dinotasikan oleh $Var(\Lambda) = \sigma_\lambda^2$.
ii. Bersyarat Λ, untuk $i = 1,..,K$, $\boldsymbol{X_i}$ independen dan berdistribusi identik.
iii. Bersyarat Λ, untuk $i = 1,..,K$, Θ_i independen dan berdistribusi identik.
iv. Jika diberikan Λ dan Θ_i, untuk $i = 1,\dots,K$ dan $j = 1,..,n$, $X_{i,j}$saling independen dan berdistribusi identik.

Selain asumsi-asumsi di atas, diberikan juga notasi yang akan digunakan dalam pembentukan model sebagai berikut:

$$E\big[X_{ij}\big|\Theta_i,\Lambda\big] = \mu(\Theta_i,\Lambda), \qquad E[\mu(\Theta_i,\Lambda)|\Lambda] = \mu_1(\Lambda), \qquad Var(\mu(\Theta_i,\Lambda\,)|\Lambda) = \sigma_2^2(\Lambda),$$

$$Var\big(\mu_1(\Lambda)\big) = a_1, \qquad E\big(\mu_1(\Lambda)\big) = \mu_1, \qquad E\left(\sigma_2^2(\Lambda)\right) = \sigma_2^2,$$

$$Var\big(X_{ij}\big|\Theta_i,\Lambda\big) = \sigma^2(\Theta_i,\Lambda), \qquad E[\sigma^2(\Theta_i,\Lambda)|\Lambda] = \sigma_1^2(\Lambda), \qquad E[\sigma_1^2(\Lambda)] = \sigma_1^2.$$

Berdasarkan asumsi-asumsi dan beberapa notasi yang diberikan di atas, terdapat beberapa sifat dasar seperti yang dijelaskan oleh Wen *et.al* (2009):

1. Mean dari $\boldsymbol{X_i}$ diberikan oleh:

$$E[\boldsymbol{X_i}] = \mu_1\boldsymbol{1_n},\ \ i = 1,2,\dots,K,$$

dimana $\boldsymbol{1}_n$ adalah vektor kolom dengan n elemen dan setiap elemennya adalah 1.

2. Matriks kovariansi dari $\boldsymbol{X}$ adalah:

$$\Sigma_{\boldsymbol{XX}} \triangleq Cov(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}) = I_K \otimes (\sigma_1^2 I_n + \sigma_2^2\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{1}_n') + a_1\boldsymbol{1}_{nK}\boldsymbol{1}_{nK}',$$

dimana $\triangleq$ berarti "didefinisikan oleh", $\otimes$ menotasikan *kronecker product*, dan I_K adalah matriks identitas dengan ukuran $K \times K$.

3. Matriks kovariansi antara seluruh informasi pengalaman klaim setiap individu dengan klaim di periode selanjutnya dari individu tertentu adalah:

$$\Sigma_{X_{i,n+1}\boldsymbol{X}} \triangleq Cov\big(X_{i,n+1},\boldsymbol{X}\big) = (\sigma_2^2 e_i' + a_1\boldsymbol{1}_K')\otimes\boldsymbol{1}_n',$$

dimana e_i adalah vektor kolom yang terdiri dari K elemen dimana elemen ke-i dari vektornya adalah 1 dan elemen lainnya adalah 0.

4. Invers dari matriks kovariansi $\boldsymbol{X}$ adalah:

$$\Sigma_{\boldsymbol{XX}}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2} I_K \otimes \left(I_n - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n' \right) - \frac{a_1}{(\sigma_1^2 + n\sigma_2^2)(\sigma_1^2 + n\sigma_2^2 + nKa_1)} \mathbf{1}_{nK} \mathbf{1}_{nK}'.$$

5.

$$\Sigma_{X_{i,n+1}\boldsymbol{X}} \Sigma_{\boldsymbol{XX}}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2} \left[\sigma_2^2 e_i' \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{n}}' + \frac{a_1 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2 + nKa_1} \mathbf{1}_{\boldsymbol{nK}}' \right]$$

Selanjutnya, pembentukan estimator model menggunakan fungsi kerugian berupa BLF dalam bentuk:

$$L(A,B) = \omega(\delta_{0i}(\boldsymbol{X}) - A - B\boldsymbol{X})^2 + (1-\omega)\left(X_{i,n+1} - A - B\boldsymbol{X}\right)^2, \tag{8}$$

dimana $\delta_{0i}(\boldsymbol{X})$ target prior dari $X_{i,n+1}$ yang sudah ditentukan, dan memenuhi $Cov\left(\delta_{0i}(\boldsymbol{X}), X_{jt}\right)$ memiliki nilai yang sama untuk $j = 1, \dots, n,\ dan\ E[\delta_{0i}(\boldsymbol{X})]$ juga bernilai sama untuk $i = 1, \dots, K$. Adapun beberapa notasi terkait BLF yang akan digunakan adalah sebagai berikut:

$$\mu_\delta = E[\delta_{0i}(\boldsymbol{X})], \qquad d_{ij} = Cov\left(\delta_{0i}(\boldsymbol{X}), X_{jt}\right), \qquad \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{i}}' = (d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{iK}),$$

$$d_{i\cdot} = Cov\left[\delta_{0i}(\boldsymbol{X}), \sum_{j=1}^{K} X_{jt}\right] = \sum_{j=1}^{K} d_{ij}, \qquad \bar{\bar{X}}_{di} = \frac{1}{d_{i\cdot}} \sum_{j=1}^{K} d_{ij}\, \bar{X}_{j.}$$

Sehingga permasalahan yang sekarang adalah akan dicari yaitu

$$\min E\left[\omega(\delta_{0i}(\boldsymbol{X}) - A - B\boldsymbol{X})^2 + (1-\omega)\left(X_{i,n+1} - A - B\boldsymbol{X}\right)^2\right] \tag{9}$$

Selanjutnya dicari estimator kredibilitas model dengan menggunakan proyeksi orthogonal dan fungsi kerugian berupa BLF. Misalkan I adalah variabel acak yang independen terhadap seluruh variabel acak lainnya dan memenuhi $Pr(I = 1) = 1 - Pr(I = 0) = \omega$. Selanjutnya didefinisikan untuk individu ke-i, $Y_i = I\delta_{0i}(\boldsymbol{X}) + (1-I)X_{i,n+1}$. Estimator kredibilitas akan dicari dengan memanfaatkan proyeksi orthogonal di $L(\boldsymbol{X}, 1)$ dengan bentuk umum persamaannya ada pada Persamaan (7). Untuk dapat menggunakan proyeksi orthogonal, maka Persamaan (9) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$minE\{(Y_i - A - B\boldsymbol{X})'(Y_i - A - B\boldsymbol{X})\}. \tag{10}$$

Berdasarkan penjelasan tersebut, akan diperoleh bentuk estimator kredibilitasnya sebagai berikut:

$$\hat{X}_{i,n+1} = E[Y_i] + \Sigma_{Y_i\boldsymbol{X}} \Sigma_{\boldsymbol{XX}}^{-1} (\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}]). \tag{11}$$

Untuk dapat menggunakan estimator kredibilitas pada Persamaan (11), perlu dicari beberapa komponennya terlebih dahulu. Perhatikan bahwa $\Sigma_{\boldsymbol{XX}}^{-\mathbf{1}}$ sudah dituliskan sebelumnya sebagai salah satu sifat dasar dari model dengan struktur dependensi yang digunakan, yaitu:

$$\Sigma_{\boldsymbol{XX}}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2} I_K \otimes \left(I_n - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n' \right) - \frac{a_1}{(\sigma_1^2 + n\sigma_2^2)(\sigma_1^2 + n\sigma_2^2 + nKa_1)} \mathbf{1}_{nK} \mathbf{1}_{nK}'$$

Sehingga sekarang perlu dicari $E[\boldsymbol{X}]$, $E[Y_i]$, dan $\Sigma_{Y_i\boldsymbol{X}}$.

1. $E[\boldsymbol{X}]$ dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E[\boldsymbol{X}] &= E[(\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \dots, \boldsymbol{X_K})'] \\ &= \mu_1 \boldsymbol{1_{nK}}, \end{aligned}$$

2. Perhatikan bahwa $E\left[X_{i,n+1}\right] = \mu_1$, sehingga $E[Y_i]$ dapat dicari sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E[Y_i] &= E\left[I\delta_{0i}(\boldsymbol{X}) + (1-I)X_{i,n+1}\right] \\ &= \omega\mu_\delta + (1-\omega)\mu_1 \end{aligned}$$

3. Perhatikan bahwa $Cov(\delta_{0i}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{X}) = d_i' \otimes \boldsymbol{1_n'}$, sehingga akan diperoleh:

$$\begin{aligned} \Sigma_{Y_i,\boldsymbol{X}} &= Cov(Y_i, \boldsymbol{X}) \\ &= Cov\left(I\delta_{0i}(\boldsymbol{X}) + (1-I)X_{i,n+1}, \boldsymbol{X}\right) \\ &= \omega Cov(\delta_{0i}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{X}) + (1-\omega)Cov\left(X_{i,n+1}, \boldsymbol{X}\right) \\ &= \omega d_i' \otimes \boldsymbol{1_n'} + (1-\omega)\Sigma_{X_{i,n+1},\boldsymbol{X}}. \end{aligned}$$

Setelah memperoleh hasil dari semua komponennya, hasil tersebut kemudian disubstitusikan kembali pada Persamaan (11) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{i,n+1} &= E[Y_i] + \Sigma_{Y_i\boldsymbol{X}}\Sigma_{\boldsymbol{XX}}^{-\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}]) \\ &= \omega\mu_\delta + (1-\omega)\mu_1 \\ &\qquad + \frac{n\omega}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{K}\left(d_{ij} - \frac{a_1 n d_{i.}}{(\sigma_1^2 + n\sigma_2^2 + nKa_1)}\right)\left(\bar{X}_j - \mu_1\right) \\ &\qquad + \frac{(1-\omega)n}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{K}\left(\sigma_2^2\eta_{ij} - \frac{a_1\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2 + nKa_1}\right)\left(\bar{X}_j - \mu_1\right) \\ &= \omega\left[\mu_\delta + \frac{n}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{K}\left(d_{ij} - \frac{a_1 n d_{i.}}{(\sigma_1^2 + n\sigma_2^2 + nKa_1)}\right)\left(\bar{X}_j - \mu_1\right)\right] \\ &\qquad + (1-\omega)\left[\mu_1 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{n}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{K}\left(\sigma_2^2\eta_{ij} - \frac{a_1\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2 + nKa_1}\right)\left(\bar{X}_j - \mu_1\right)\right] \end{aligned} \tag{12}$$

Persamaan (12) dapat diselesaikan dengan membaginya terlebih dahulu menjadi dua komponen bagian. Bagian yang pertama yaitu:

$$\begin{aligned} &\omega\left[\mu_\delta + \frac{n}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{K}\left(d_{ij} - \frac{a_1 n d_{i.}}{(\sigma_1^2 + n\sigma_2^2 + nKa_1)}\right)\left(\bar{X}_j - \mu_1\right)\right] \\ &\qquad = \omega\left[\mu_\delta - \frac{n d_{i.}\mu_1}{(\sigma_1^2 + n\sigma_2^2 + nKa_1)} + \frac{n}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{K}\left(d_{ij} - \frac{a_1 n d_{i.}}{(\sigma_1^2 + n\sigma_2^2 + nKa_1)}\right)\bar{X}_j\right]. \end{aligned}$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa $\eta_{ij} = 1$ ketika $i = j$ dan $\eta_{ij} = 0$ ketika $i \neq j$. Karena nilai dari i hanya dari 1 sampai K, maka $\sum_{j=1}^{K}\eta_{ij} = 1$. Sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned} &(1-\omega)\left[\mu_1 + \frac{n}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{K}\left(\sigma_2^2\eta_{ij} - \frac{a_1\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2 + nKa_1}\right)\left(\bar{X}_j - \mu_1\right)\right] \\ &\qquad = (1-\omega)\left[\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2 + nKa_1}\mu_1 \right. \\ &\qquad\quad \left. + \frac{n}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{K}\left(\sigma_2^2\eta_{ij} - \frac{a_1\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2 + nKa_1}\right)\bar{X}_j\right]. \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil di atas, akan diperoleh estimator kredibilitas dalam persamaan:

$$\begin{aligned}\hat{X}_{i,n+1} = &\frac{(1-\omega)n\sigma_2^2+\omega\sigma_1^2}{n\sigma_2^2+\sigma_1^2}\bar{X}_i + \frac{nKa_1(\omega n\sigma_2^2+(1-\omega)\sigma_1^2)}{(n\sigma_2^2+\sigma_1^2)(nKa_1+n\sigma_2^2+\sigma_1^2)}\bar{\bar{X}} \\ &+ \frac{\omega n\sigma_2^2+(1-\omega)\sigma_1^2}{nKa_1+n\sigma_2^2+\sigma_1^2}\mu_1, \quad i=1,2,\dots,K,\end{aligned} \tag{13}$$

dengan $\bar{X}_j = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{j,k}$, dan $\eta_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan $\eta_{ij} = 0$ ketika $i \neq j$.

Misalkan dipilih $\mu_\delta = \mu_1$ dan dipilih $\delta_{0i}(\boldsymbol{X}) = \bar{X}_i$. Perhatikan bahwa $E(X_{i,l}|\Lambda) = E\left(E\left[X_{i,j}|\Theta_i,\Lambda\right]\middle|\Lambda\right) = E(\mu(\Theta_i,\Lambda)|\Lambda) = \mu_1(\Lambda)$. Sehingga untuk $i \neq j$ akan didapatkan

$$d_{ij} = Cov(\bar{X}_\iota, X_{j,t}) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Cov\left[E(X_{i,l}|\Lambda), E(X_{j,t}|\Lambda)\right] = Cov[\mu_1(\Lambda),\mu_1(\Lambda)] = a_1.$$

Lalu, untuk $i = j$,

$$\begin{aligned} d_{ij} = Cov(\bar{X}_\iota, X_{i,t}) &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left\{E\left[Cov(X_{i,l}, X_{i,t}|\Theta_\mathrm{i},\Lambda)\right] + Cov\left[E(X_{i,l}, X_{i,t}|\Theta_\mathrm{i},\Lambda)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{n}E\left[Cov(X_{i,t}, X_{i,t}|\Theta_\mathrm{i},\Lambda)\right] + Cov\left[E(X_{i,l}|\Theta_i,\Lambda), E(X_{i,t}|\Theta_\mathrm{i},\Lambda)\right] \\ &= \frac{1}{n}\sigma_1^2 + a_1. \end{aligned}$$

Berdasarkan hal tersebut, maka d_i. Dapat dituliskan sebagai berikut:

$$d_i. = \sum_{j=1}^{K} d_{ij} = (K-1)a_1 + \frac{1}{n}\sigma_1^2 + a_1 = Ka_1 + \frac{1}{n}\sigma_1^2,$$

Maka estimator kredibilitas dalam Persamaan (13) dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned}\hat{X}_{i,n+1} = &\frac{(1-\omega)n\sigma_2^2+\omega\sigma_1^2}{n\sigma_2^2+\sigma_1^2}\bar{X}_i + \frac{nKa_1(\omega n\sigma_2^2+(1-\omega)\sigma_1^2)}{(n\sigma_2^2+\sigma_1^2)(nKa_1+n\sigma_2^2+\sigma_1^2)}\bar{\bar{X}} \\ &+ \frac{\omega n\sigma_2^2+(1-\omega)\sigma_1^2}{nKa_1+n\sigma_2^2+\sigma_1^2}\mu_1, \quad i=1,2,\dots,K,\end{aligned} \tag{14}$$

(13)

Jika bobot $\omega = 0$ pada BLF, maka bentuk dari fungsi kerugian yang digunakan adalah *squared error loss function* $\left(X_{i,n+1} - A - B\boldsymbol{X}\right)^2$. Sehingga diperoleh model kredibilitas Bühlmann dengan risiko bersama yang dijelaskan oleh Wen, *et.al*. (2009). Estimator kredibilitasnya yaitu:

$$\begin{aligned}\hat{X}_{i,n+1} = &\frac{n\sigma_2^2}{n\sigma_2^2+\sigma_1^2}\bar{X}_i + \frac{nKa_1\sigma_1^2}{(n\sigma_2^2+\sigma_1^2)(nKa_1+n\sigma_2^2+\sigma_1^2)}\bar{\bar{X}} \\ &+ \frac{\sigma_1^2}{nKa_1+n\sigma_2^2+\sigma_1^2}\mu_1. i = 1,\dots,K.\end{aligned} \tag{15}$$

Apabila nilai $a_1 = 0$, artinya tidak terdapat parameter risiko bersama, dan jika dipilih $\omega = 0$ maka akan diperoleh model kredibilitas Bühlmann standar. Estimator krediblitasnya adalah:

$$\hat{X}_{i,n+1} = \frac{n\sigma_2^2}{n\sigma_2^2+\sigma_1^2}\bar{X}_i + \frac{\sigma_1^2}{n\sigma_2^2+\sigma_1^2}\mu_1. i = 1,\dots,K. \tag{16}$$

Estimator Tak Bias dari Parameter Model

Untuk dapat menggunakan estimator kredibilitas pada Persamaan (14), perlu dicari beberapa nilai parameter, yaitu: $\mu_1, \sigma_1^2, \sigma_2^2$, dan a_1. Ebrahimzadeh, M, *et.al* (2012) mengasumsikan terdapat R portofolio yang memenuhi asumsi model, dengan masing-masing portofolio terdiri dari K individu dan n periode data pengalaman klaim. Berdasarkan asumsi tersebut, didapatkan estimasi parameter tak bias dari model yaitu:

$$\widehat{\sigma_2^2} = \frac{1}{R(K-1)}\sum_{r=1}^{R}\sum_{i=1}^{K}\left(\bar{X}_{r,i.} - \bar{X}_{r,..}\right)^2 - \frac{\widehat{\sigma_1^2}}{n} \qquad \widehat{\mu_1} = \frac{1}{RKn}\sum_{r=1}^{R}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} X_{r,i,j}$$

$$\widehat{\sigma_1^2} = \frac{1}{RK(n-1)}\sum_{r=1}^{R}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{r,i,j} - \bar{X}_{r,i.}\right)^2 \qquad \widehat{a_1} = \frac{1}{R-1}\sum_{r=1}^{R}\left(\bar{X}_{r,..} - \bar{X}_{...}\right)^2 - \frac{\widehat{\sigma_2^2}}{n}.$$

dimana $\bar{X}_{r,i.} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{r,i,j}$ adalah rata-rata pengalaman klaim individu ke-i selama n periode pada portofolio ke-r, $\bar{X}_{r,..} = \frac{1}{Kn}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} X_{r,i,j}$ adalah rata-rata seluruh pengalaman klaim individu selama n periode pada portofolio ke-r, dan $\bar{X}_{...} = \frac{1}{RKn}\sum_{r=1}^{R}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} X_{r,i,j}$ adalah rata-rata seluruh pengalaman klaim individu selama n periode untuk semua portofolio yang ada.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Seperti yang sebelumnya sudah disebutkan, data yang digunakan merupakan data yang dibangkitkan yang memiliki karakteristik dan memenuhi asumsi yang ada pada TABEL 1.

TABEL 1. Karakteristik dan Asumsi Data

Nama	Deskripsi
Data pengalaman klaim individu ke-i pada periode ke-j:	$X_{i,j} \mid \Theta_i, \Lambda \sim N(\theta_i + \lambda, \sigma_x^2), i = 1, \dots, K,$ $j = 1, \dots, n.$
Parameter risiko individu:	$\Theta_i \sim N(\mu_\theta, \sigma_\theta^2)$
Parameter risiko bersama:	$\Lambda \sim N(\mu_\lambda, \sigma_\lambda^2)$
Jumlah individu dan periode:	$K = 11$ & $\mathrm{n} = 10$
Nilai parameter:	$\sigma_x^2 = 6084 \quad \mu_\theta = 100 \quad \sigma_\theta^2 = 1024, \mu_\lambda = 200, \sigma_\lambda^2 = 4096$

Diasumsikan terdapat beberapa jumlah portofolio yang akan digunakan untuk mencari taksiran tak bias parameter-parameter model. Setiap portofolio tersebut memiliki struktur model yang sama, yaitu model kredibilitas dengan risiko bersama yang menggunakan fungsi kerugian berupa BLF. Karena sekarang terdapat beberapa portofolio, maka diperlukan penyesuaian pada bentuk persamaan model kredibilitas yang digunakan. Persamaan (14) dituliskan kembali menjadi Persamaan (17), dan Persamaan (15) dituliskan kembali menjadi Persamaan (18).

$$\begin{aligned}\hat{X}_{r,i,n+1} = {} & \frac{(1-\omega)n\sigma_2^2 + \omega\sigma_1^2}{n\sigma_2^2 + \sigma_1^2}\bar{X}_{r,i.} + \frac{nKa_1(\omega n\sigma_2^2 + (1-\omega)\sigma_1^2)}{(n\sigma_2^2 + \sigma_1^2)(nKa_1 + n\sigma_2^2 + \sigma_1^2)}\bar{X}_{r,..} \\ & + \frac{\omega n\sigma_2^2 + (1-\omega)\sigma_1^2}{nKa_1 + n\sigma_2^2 + \sigma_1^2}\mu_1, r = 1, \dots 5, i = 1, \dots, 10\end{aligned} \tag{17}$$

$$\hat{X}_{r,i,n+1} = \frac{n\sigma_2^2}{n\sigma_2^2+\sigma_1^2}\bar{X}_{r,i.} + \frac{nKa_1\sigma_1^2}{(n\sigma_2^2+\sigma_1^2)(nKa_1+n\sigma_2^2+\sigma_1^2)}\bar{X}_{r,..} + \frac{\sigma_1^2}{nKa_1+n\sigma_2^2+\sigma_1^2}\mu_1, r=1,\dots 5, i=1,\dots,10. \quad (18)$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa persamaan untuk Model 1 dapat dituliskan dalam persamaan

$$\hat{X}_{r,i,n+1} = W_1\bar{X}_{r,i.} + W_2\bar{X}_{r,..} + W_3\mu_1 \quad (19)$$

dimana $W_1 = \frac{(1-\omega)n\sigma_2^2+\omega\sigma_1^2}{n\sigma_2^2+\sigma_1^2}$, $W_2 = \frac{nKa_1(\omega n\sigma_2^2+(1-\omega)\sigma_1^2)}{(n\sigma_2^2+\sigma_1^2)(nKa_1+n\sigma_2^2+\sigma_1^2)}$, dan $W_3 = \frac{\omega n\sigma_2^2+(1-\omega)\sigma_1^2}{nKa_1+n\sigma_2^2+\sigma_1^2}$. Dengan menggunakan data yang ada, akan diperoleh estimator tak bias dari parameter-parameter model, yaitu $\widehat{\mu_1} = 352{,}184$, $\widehat{\sigma_1^2} = 6296{,}167$, $\widehat{\sigma_2^2} = 561{,}181$, dan $\widehat{a_1} = 75{,}512$. Untuk mendapatkan nilai dari bobot W_1, W_2, dan W_3, perlu dilakukan pemilihan nilai ω terlebih dahulu. Tabel 2 memberikan nilai dari bobot Model 1 dengan beberapa pemilihan nilai ω. Selain itu, perhatikan juga bahwa ketika $\omega = 0$, maka dapat diperoleh bobot untuk Model 2.

TABEL 2. Nilai Bobot Pada Model 1 dengan Menggunakan Beberapa Nilai $\boldsymbol{\omega}$

Parameter	$\boldsymbol{\omega}$						
	0	**0.1**	**0.3**	**0.5**	**0.7**	**0.9**	**1**
W_1	0,471	0,477	0,489	0,500	0,511	0,523	0,529
W_2	0,204	0,201	0,197	0,192	0,188	0,184	0,181
W_3	0,325	0,322	0,315	0,308	0,300	0,293	0,290

Berdasarkan Tabel 2, semakin besar pemilihan nilai ω maka bobot W_1 akan semakin besar, sedangkan bobot W_2 dan W_3 akan semakin kecil. Hal ini menunjukkan bahwa pada suatu portofolio r, ketika ω yang dipilih semakin besar maka rata-rata pengalaman klaim individu ke-i $\left(\bar{X}_{r,i.}\right)$ memiliki pengaruh yang lebih besar terhadap nilai estimasi klaim individu tersebut $\left(\hat{X}_{r,i,n+1}\right)$ dibandingkan dengan nilai rata-rata dari klaim pada suatu portofolio yaitu $\left(\bar{X}_{r,..}\right)$ ataupun nilai μ_1 yang diestimasi oleh rata-rata seluruh klaim $(\bar{X}_{...})$. Artinya prediksi klaim seorang individu akan lebih banyak menggunakan informasi data pengalaman klaimnya sendiri ketika dipilih ω yang besar.

Pada Tabel 3, perhatikan bahwa nilai prediksi klaim pada periode ke-11 dari seorang individu berbeda-beda seiring dipilihnya nilai ω yang berbeda. Selain itu, nilai variansi dari nilai prediksi klaim 10 individu juga berbeda ketika dipilih nilai ω yang berbeda. Nilai variansi prediksi klaim terkecil yaitu pada pemilihan $\omega = 0$ dan nilai variansinya terus bertambah sampai pada nilai variansi terbesar ketika dipilih $\omega = 1$.

TABEL 3. Nilai Prediksi Klaim Periode Ke-11 dan Variansinya dari 10 Individu Pada Portofolio Pertama Menggunakan Model 1

Individu ke-i	$\boldsymbol{\omega}$						
	0	**0.1**	**0.3**	**0.5**	**0.7**	**0.9**	**1**
1	373,876	374,160	374,728	375,297	375,865	376,434	376,718
2	335,404	335,219	334,849	334,479	334,109	333,739	333,554
3	354,238	354,283	354,372	354,462	354,551	354,641	354,685
4	341,018	340,901	340,668	340,435	340,202	339,969	339,852
5	352,099	352,117	352,155	352,192	352,229	352,266	352,285
6	352,977	353,007	353,065	353,124	353,183	353,241	353,270
7	350,378	350,375	350,371	350,366	350,361	350,356	350,354
8	344,172	344,094	343,937	343,781	343,625	343,469	343,391
9	327,507	327,225	326,663	326,100	325,538	324,975	324,694
10	361,945	362,083	362,361	362,638	362,915	363,193	363,331
Variansi	174,853	179,143	187,881	196,826	205,979	215,341	220,100

Jika ditinjau dari bentuk BLF pada Persamaan (8), ketika dipilih $\omega = 0$ maka fungsi kerugian yang digunakan hanya memiliki bentuk $\left(X_{r,i,n+1} - A - B\boldsymbol{X}\right)^2$, yang merupakan fungsi kerugian seperti yang digunakan pada Model 2 yaitu *squared error loss function*. Bentuk fungsi kerugian tersebut memperhitungkan presisi dari hasil estimasi. Adapun presisi dalam hal ini menggambarkan hasil prediksi klaim memiliki variansi yang kecil, atau dapat dikatakan juga bahwa nilai antara prediksi klaim yang diperoleh tidak berbeda jauh. Oleh karena itu, semakin kecil nilai dari ω, maka kontribusi yang diberikan $\left(X_{r,i,n+1} - A - B\boldsymbol{X}\right)^2$ dalam memprediksi besar klaim semakin besar dan menyebabkan nilai dari presisi yang semakin kecil. Sebaliknya, ketika dipilih nilai ω yang besar maka menyebabkan bobot dari $\left(X_{r,i,n+1} - A - B\boldsymbol{X}\right)^2$ semakin kecil, sehingga nilai presisi yang diperoleh akan bernilai semakin besar atau.

Selanjutnya, dengan menggunakan hasil prediksi klaim yang didapatkan, maka dapat dilakukan perbandingan antara nilai prediksi klaim tersebut dengan nilai yang sesungguhnya. Dalam hal ini akan dihitung nilai MSE dari prediksi klaim yang diperoleh menggunakan Model 1 dengan beberapa pemilihan nilai ω. Sama seperti yang sudah dijelaskan sebelumnya, ketika $\omega = 0$ maka akan didapatkan Model 2. Berdasarkan Tabel 4, dapat dilihat bahwa pada portofolio pertama, semakin besar nilai ω yang digunakan, maka nilai dari MSE semakin besar.

Perhatikan kembali bentuk dari BLF pada Persamaan (8), semakin besar nilai ω yang digunakan maka bobot yang diberikan pada $(\delta_{0\mathrm{ri}}(\mathbf{X}) - \mathrm{A} - \mathrm{B}\mathbf{X})^2$ semakin besar sehingga bentuk tersebut memberikan kontribusi yang semakin besar juga dalam memprediksi besar klaim. Berdasarkan hal tersebut, maka pada contoh yang sudah diberikan dapat dikatakan bahwa pemilihan nilai $\delta_{0\mathrm{ri}}(\mathbf{X})$ pada portofolio pertama tidak cukup baik dalam memprediksi besar klaim, atau dapat dikatakan juga bahwa rata-rata pengalaman klaim individu pada portofolio yang pertama $\left(\bar{X}_{1,i.}\right)$ kurang dapat memberikan nilai prediksi klaim yang mendekati nilai sesungguhnya $\left(\bar{X}_{1,i,n+1}\right)$

TABEL 4. Nilai MSE Portofolio Pertama

	ω						
	0	**0.1**	**0.3**	**0.5**	**0.7**	**0.9**	**1**
MSE	10509,115	10518,267	10536,714	10555,349	10574,174	10593,188	10602,765

Berdasarkan pemarapan dari penerapan model kredibilitas Bühlmann dengan risiko bersama yang menggunakan BLF, dapat dilihat pengaruh dari penggunaan BLF pada model khususnya pada pemilihan nilai ω yang dapat menghasilkan besar MSE model dan variansi nilai prediksi klaim yang berbeda-beda sehingga dapat mempengaruhi *goodness of fit* model dan presisi yang diperoleh. Diperoleh juga bahwa ketika nilai ω yang dipilih semakin kecil, maka presisi dari hasil prediksi yang didapatkan semakin baik. Hal ini dapat dilihat dari variansi nilai prediksi yang diperoleh. Pada contoh perhitungan portofolio pertama diperoleh bahwa ketika ω yang dipilih semakin besar, nilai MSE dari model akan semakin besar yang berarti *goodness of fit* dari model kurang baik. Hal ini dapat terjadi karena pemilihan $\delta_{0i}(\boldsymbol{X})$ (rata-rata pengalaman klaim individu pada portofolio tersebut yaitu $\bar{X}_{1,i.}$) pada model yang kurang baik dalam memprediksi $X_{1,i,j}$. Sehingga dapat dipertimbangkan pemilihan target prior lainnya untuk prediksi awal $X_{1,i,j}$.

KESIMPULAN DAN SARAN

Dalam penelitian ini, sudah dibahas mengenai pembentukan estimator dari model kredibiltias Bühlmann dengan risiko bersama yang menggunakan *balanced loss function* (BLF) memanfaatkan proyeksi orthogonal pada subruang Hilbert yang memuat semua kemungkinan estimasi dari *hypothetical mean*. Fungsi kerugian yang digunakan dalam pembentukan model adalah BLF dengan memilih komponennya, yaitu sembarang fungsi kerugian yang digunakan adalah *squared error loss* dan estimator awal berupa rata-rata pengalaman klaim individunya.

Pemilihan nilai bobot yang ada pada BLF dapat mempengaruhi presisi dari prediksi nilai-nilai klaim yang diperoleh. Selain itu, pemilihan bobot pada BLF juga akan berpengaruh pada MSE model yang didapatkan. Oleh karena itu, dapat dilakukan pemilihan hasil prediksi yang lebih berfokus pada presisi atau berfokus pada MSE dengan mengatur nilai bobot pada BLF tersebut. Ketika dipilih bobot pada BLF bernilai 0 akan diperoleh model kredibilitas Bühlmann dengan risiko bersama yang menggunakan fungsi kerugian *squared error loss function*. Lebih lanjut lagi, ketika dipilih bobot pada BLF bernilai 0 dan tidak terdapat risiko bersama, maka akan diperoleh model kredibilitas Bühlmann standar.

Untuk penelitian selanjutnya, model kredibilitas yang digunakan dapat dikembangkan dengan menambahkan parameter yang mempertimbangkan dependensi antara portofolio atau parameter yang mengukur hubungan korelasi antara setiap periode pengalaman klaim dari seorang individu, dengan fungsi kerugian yang digunakan adalah BLF. Selain itu, dengan struktur model yang sama, dapat dibentuk juga model kredibilitas Bühlmann-Straubb yang menggunakan fungsi kerugian BLF.

REFERENSI

Anton, H, and Kaul, A., 2019. *Elementary Linear Algebra* (12th ed.). John Wiley & Sons.

Bühlmann, H. and Gisler, A., 2005. Credibility Estimators. *A Course in Credibility Theory and its Applications*, Berlin, Springer.

Ebrahimzadeh, M., Ibrahim, N.A., Jemain, A.A. and Kilicman, A., 2012. Unbiased estimation of structural parameters in credibility models with dependence induced by common effects. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, *35*(4).

Fristedt, B. & Gray, L. 1997. *Probability and Its Applications: A modern approach to probability theory*. Switzerland, Birlchäuser.

Hogg, R. V., McKean, J. W. & Craig, A. T. 2019. *Introduction to mathematical statistics* (8th ed.), hh. 414. Boston, Pearson.

Klugman, S.A., Panjer, H.H. and Willmot, G.E., 2019. *Loss models: from data to decisions* (5th ed.). John Wiley & Sons.

Mowbray, A.H., 1914. How extensive a payroll exposure is necessary to give a dependable pure premium. In *Proceedings of the Casualty Actuarial society* (Vol. 1, No. 1, hh. 24-30).

Wen, L., Wu, X. and Zhou, X., 2009. The credibility premiums for models with dependence induced by common effects. *Insurance: Mathematics and Economics*, *44*(1), hh.19-25.

Weizhong, H. and Xianyi, W., 2012. The credibility premiums with common effects obtained under balanced loss functions. *应用概率统计*, *28*(2).

Yeo, K.L. & Valdez, E.A. 2006. Claim dependence with common effects in credibility models, *Insurance:Mathematics and Economics*, 38, hh. 609-629.