JSA

Volume 6 Issue 1,
June 2022

e-ISSN: 2620-8369

Received: 27 April 2022
Revised: 12 June 2022
Accepted: 27 June 2022
Published: 30 June 2022

Metode Bayesian *Chain Ladder* untuk Memprediksi Cadangan Klaim

Nadya Arifani[1, a)], Siti Nurrohmah[1, b)], Ida Fithriani[1, c)]

[1]*Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,Universitas Indonesia, Depok, 16424, Indonesia*

Email: [a)]nadyaarifani@sci.ui.ac.id, [b)]snurrohmah@sci.ui.ac.id, [c)]ida.f@sci.ui.ac.id

Abstract

Insurance companies are required to prepare the claim reserves to pay claims that will occur in the future. A method that is often used to predict claim reserves is the Chain Ladder. This method works by predicting a claims reserve using the estimation of development factor that states the claims development in each period of delay in claims payment. In spite of that, the Chain Ladder method solely uses only the data set of past claims payment. When in fact, there may be other important information that can be used in predicting claims reserves. The additional information that can be used is past information obtained from similar experiences or from something that is considered credible by experts. Wüthrich and Merz (2015) developed the Bayesian Chain Ladder method that applies Bayesian theory into the Chain Ladder method. To predict claim reserves, Bayesian Chain Ladder uses Bayesian development factor by constructing distribution on prior information and distribution of the data. The distribution used is Gamma distribution as prior and data distribution. This paper discusses the application of Bayesian theory to the Chain Ladder method and presents a numerical simulation using data from general insurance in the United States. The result shows that Bayesian Chain Ladder method provides a claims reserve prediction depends on the credibility weight in considering the past information. Different credibility weight will always result in different claim reserves prediction and it depends on the opinion of experts, hence Bayesian Chain Ladder method results in a subjective claims reserve prediction.

Keywords: Gamma Distribution, Outstanding Claim, Posterior Information, Prior Information, Run-Off Triangle.

Abstrak

Perusahaan asuransi perlu mempersiapkan sejumlah uang yang disebut dengan cadangan klaim untuk membayar klaim yang akan terjadi di masa depan. Salah satu metode yang sering digunakan untuk memprediksi cadangan klaim adalah metode *Chain Ladder*. Metode ini memprediksi cadangan klaim menggunakan estimasi *development factor* yang menyatakan perkembangan besar klaim pada setiap periode penundaan pembayaran klaim. Namun, metode *Chain Ladder* hanya murni menggunakan kumpulan data pembayaran klaim-klaim masa lalu. Padahal, tidak menutup kemungkinan ada informasi penting lainnya yang dapat digunakan untuk memprediksi cadangan klaim. Salah satu informasi tersebut adalah informasi masa lalu yang diperoleh dari pengalaman serupa ataupun dari sesuatu yang dipercaya oleh para ahli. Wüthrich and Merz (2015) mengembangkan metode Bayesian *Chain Ladder* yang menerapkan teori Bayesian untuk menambahkan informasi masa lalu ke dalam metode *Chain Ladder*. Untuk memprediksi cadangan klaim, metode Bayesian *Chain Ladder* menggunakan Bayesian *development factor* dengan mengonstruksikan distribusi pada informasi *prior* (informasi masa lalu) dan distribusi dari data yang diamati. Distribusi yang digunakan adalah distribusi Gamma sebagai distribusi *prior* dan distribusi data. Secara umum, makalah ini membahas mengenai penerapan teori Bayesian pada metode *Chain Ladder* serta ditampilkan juga simulasi numerik menggunakan data perusahaan asuransi umum di Amerika Serikat. Didapatkan hasil bahwa metode Bayesian *Chain Ladder* memberikan prediksi cadangan klaim yang bergantung pada bobot kepercayaan dalam mempertimbangkan informasi masa lalu yang digunakan dalam model. Bobot kepercayaan yang berbeda akan selalu menghasilkan prediksi cadangan klaim yang berbeda. Perbedaan bobot kepercayaan yang dipilih tergantung dari pendapat para ahli, sehingga prediksi cadangan klaim dengan menggunakan metode Bayesian *Chain Ladder* bersifat subjektif.

Kata-kata kunci: Distribusi Gamma, Informasi Posterior, Informasi *Prior*, *Outstanding Claim*, *Run-Off Triangle*.

PENDAHULUAN

Ketika menggunakan jasa asuransi dan mengajukan klaim kepada perusahaan asuransi, seringkali terdapat permasalahan dalam proses penyelesaian atau pembayaran klaimnya, yaitu adanya penundaan dalam pembayaran klaim selama beberapa periode tertentu. Penundaan tersebut disebabkan oleh dua hal yaitu, penundaan laporan klaim oleh nasabah dan penundaan dalam pembayaran klaim oleh perusahaan asuransi. Akibatnya, perusahaan asuransi perlu mempersiapkan cadangan klaim sebagai prediksi besaran klaim yang akan terjadi di masa yang akan datang agar perusahaan asuransi dapat mempersiapkan sejumlah uang untuk membayar klaim tersebut. Dengan adanya cadangan klaim, perusahaan asuransi dapat meminimalisir potensi risiko gagal bayar hingga kebangkrutan. Kumpulan dari klaim nasabah yang ditunda proses penyelesaiannya disebut dengan istilah *outstanding claims*. Besar *outstanding claims* dapat digambarkan melalui suatu tabel yang dinamakan *run-off triangle*. *Run-off triangle* berbentuk matriks dengan entri pada baris ke-i dan kolom ke-j dinotasikan dengan $C_{i,j}$ yang menyatakan peubah acak dari total besarnya klaim yang terjadi pada tahun kejadian i dan diselesaikan hingga tahun penundaan j.

Run-off triangle terbagi menjadi dua bagian, yaitu *development triangle* yang berisi klaim yang sudah selesai dibayarkan dan *future triangle* berisi klaim yang masih perlu dibayarkan (Olofsson, 2006). Untuk memprediksi cadangan klaim, perlu terlebih dahulu memprediksi *future triangle*. Salah satu metode yang sering digunakan untuk memprediksi *future triangle* adalah metode *Chain Ladder*. Metode *Chain Ladder* merupakan metode deterministik yang paling populer untuk menaksir *outstanding claims* karena dinilai sederhana dan bersifat bebas distribusi (Mack, 1993). Namun, metode *Chain Ladder* hanya murni menggunakan kumpulan data pembayaran klaim-klaim masa lalu, padahal banyak informasi tambahan yang dapat digunakan untuk memprediksi cadangan klaim, salah satunya adalah informasi masa lalu yang diperoleh dari pengalaman serupa ataupun dari sesuatu yang dipercaya oleh para ahli. Wüthrich and Merz (2015) mengembangkan metode Bayesian *Chain Ladder* dengan memasukkan informasi masa lalu ke dalam metode *Chain Ladder* dengan menggunakan teori Bayesian. Distribusi yang akan digunakan pada metode Bayesian *Chain Ladder* adalah distribusi Gamma. Prediksi cadangan klaim dapat diperoleh dari hasil informasi baru yang telah terbentuk. Setelah memprediksi cadangan klaim menggunakan metode Bayesian *Chain Ladder*, selanjutnya akan dilakukan perbandingan hasil prediksi cadangan klaim dari metode Bayesian *Chain Ladder* dengan metode Mack *Chain Ladder*. Perbandingan dari kedua metode bertujuan untuk mengetahui perbedaan hasil prediksi cadangan klaim dengan dan tanpa menerapkan teori Bayesian pada metode Mack *Chain Ladder*. Secara umum artikel ini membahas mengenai penerapan teori Bayesian pada metode *Mack Chain Ladder* beserta contohnya menggunakan data perusahaan asuransi umum di Amerika Serikat.

METODOLOGI

Metode Penelitian

Run-Off Triangle

Run-off triangle merupakan ringkasan data klaim secara keseluruhan yang merupakan ringkasan dari suatu *data set* klaim-klaim individu (Antonio et al., 2006). Data yang ada dalam *run-off triangle* dapat berupa data besarnya klaim (*claim amount)* atau banyaknya klaim (*number of claims)*, yang tersaji dalam bentuk *incremental* atau *cumulative. Run-off triangle* yang berbentuk *incremental*, entri pada baris ke-i dan kolom ke-j dinotasikan dengan $X_{i,j}$ yang merupakan peubah acak dari besarnya klaim yang terjadi pada tahun kejadian i $(0 \leq i \leq n)$ dan diselesaikan pada tahun penundaan j $(0 \leq j \leq n)$. Pada *Run-off triangle* yang berbentuk *cumulative*, entri pada baris ke-i dan kolom ke-j dinotasikan dengan $C_{i,j}$ yang menyatakan peubah acak dari total besarnya klaim yang terjadi pada tahun kejadian i dan diselesaikan hingga tahun penundaan j. *Run-off triangle cumulative* dapat diperoleh dengan menjumlahkan kolom-kolom *run-off triangle incremental* untuk setiap baris tahun kejadian i sehingga, $C_{i,j} = \sum_{k=0}^{j} X_{i,k}$ dimana $0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq n, i + j \leq n$.

Accident Year	Development Year						
	0	1	$\dots$	j	$\dots$	$n-1$	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$\dots$	$C_{0,j}$	$\dots$	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$\dots$	$C_{1,j}$	$\dots$	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$	$\dots$	$C_{i,j}$	$\dots$	$C_{i,n-1}$	$C_{i,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$	$\dots$	$C_{n-1,j}$	$\dots$	$C_{n-1,n-1}$	$C_{n-1,n}$
n	$C_{n,0}$	$C_{n,1}$	$\dots$	$C_{n,j}$	$\dots$	$C_{n,n-1}$	$C_{n,n}$

GAMBAR 1. Ilustrasi *Run-Off Triangle Cumulative*

GAMBAR 1, menunjukan bahwa *Run-off triangle* terbagi menjadi dua bagian, yaitu *development triangle* dan *future triangle* (Olofsson, 2006). *Development triangle* berbentuk matriks segitiga atas yang dinotasikan dengan $\mathcal{D} = \{C_{i,j};\ 0 \leq\ i + j\ \leq\ n, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n\}$. Sedangkan, *future triangle* berbentuk matriks segitiga bawah yang dinotasikan dengan $\mathcal{D}^c = \{C_{i,j};\ i + j\ >\ n, 0 < i \leq n, 0 < j \leq n\}$. Untuk mendapatkan prediksi cadangan klaim, perlu dilakukan prediksi terhadap entri dalam *future triangle*, ditunjukan oleh GAMBAR 1 yang berwarna biru, sel-sel berwarna hijau disebut *paid-to-date claims*, yaitu total semua besar klaim yang sudah dibayarkan hingga tahun penundaan terakhir pada *development tringle.* Sedangkan sel-sel yang berwarna kuning disebut *ultimate claims*, yaitu *cumulative claims* sampai tahun penundaan ke-n. Cadangan klaim untuk tahun kejadian ke-i merupakan selisih *ultimate claims* yang berwarna kuning dengan *paid-to-date claims* pada diagonal yang berwarna hijau, dinotasikan dengan $R_i =\ C_{i,n} - C_{i,n-i}$, dimana $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Sedangkan total cadangan klaim (R) didefinisikan sebagai penjumlahan cadangan klaim untuk semua tahun kejadian dimana $i\ = 1,2,3, \dots, n$ yang dapat ditulis $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$.

Chain Ladder Method

Metode *Chain Ladder* atau Mack *Chain Ladder* merupakan metode deterministik yang hanya bergantung pada kumpulan data pengalaman pembayaran klaim-klaim masa lalu. Dalam memprediksi cadangan klaim, akan digunakan *development factor* yang menggambarkan faktor perkembangan besar klaim antar tahun penundaan yang berurutan. Mack (1993) mengasumsikan bahwa metode *Chain Ladder* bersifat *distribution-free* yang memiliki asumsi model sebagai berikut:

1. Peubah acak $C_{i,j}$ dan $C_{p,j}$ adalah saling bebas untuk setiap tahun kejadian $i \neq p$
2. Untuk $0 \leq i \leq n$ dan $0 \leq j \leq n-1$ terdapat development factor $f_j > 0$ dengan $\mathbb{E}\left[C_{i,j+1} \middle| C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,j} \right] = C_{i,j} f_j$
3. Untuk $0 \leq i \leq n$ dan $0 \leq j \leq n-1$ terdapat $s_j^2 > 0$ yang merupakan parameter pada variansi dari cumulative claims dengan $Var\left(C_{i,j+1} \middle| C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,j}\right) = C_{i,j} s_j^2$

Mack (1993) mengestimasi f_j dan s_j^2 dengan persamaan berikut

$$\hat{f}_j^{MCL} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}} ; \text{untuk } 0 \leq j \leq n-1 \tag{1}$$

$$\hat{s}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j^{MCL} \right)^2 ; \text{untuk } 0 \leq j \leq n-2 \tag{2}$$

$$\hat{s}_{n-1}^2 = \min\left\{ \min\left(s_{n-3}^2, s_{n-2}^2\right), \frac{\hat{s}_{n-2}^4}{\hat{s}_{n-3}^2} \right\} \tag{3}$$

Akibat dari 3 asumsi di atas, nilai ekspektasi dari $C_{i,j}$ untuk setiap tahun kejadian ke- i dan tahun penundaan ke- j, $j = 0,1,\dots,n$ dapat diperoleh sebagai berikut

$$\mathbb{E}\left[C_{i,j}\right] = C_{i,n-i} * \prod_{u=n-i}^{j-1} f_u \tag{4}$$

Dari persamaan di atas untuk $j = n$, ekspektasi ultimate claims dengan menggunakan metode Mack *Chain Ladder* untuk setiap tahun kejadian i dinyatakan dengan

$$\mathbb{E}\left[C_{i,n}\right] = C_{i,n-i} * \prod_{u=n-i}^{n-1} f_u \tag{5}$$

Jika telah didapatkan estimasi dari *development factor* yang didefinisikan oleh Mack (1993), maka estimasi dari *ultimate claims* dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\hat{C}_{i,n}^{MCL} = C_{i,n-i} * \prod_{u=n-i}^{n-1} \hat{f}_u^{MCL} \tag{6}$$

Selanjutnya, prediksi cadangan klaim untuk setiap tahun kejadian i yang harus disediakan oleh perusahaan asuransi didapat dari selisih antara *ultimate claims* dengan *cumulative claims* yang berada pada diagonal utama *run-off* triangle, yaitu

$$\hat{R}_i^{MCL} = \hat{C}_{i,n}^{MCL} - C_{i,n-i} \tag{7}$$

Total prediksi cadangan klaim untuk semua tahun kejadian adalah

$$\hat{R}^{MCL} = \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i^{MCL} \tag{8}$$

Bayesian Theory

Inferensi Bayesian menggunakan Teorema Bayes sebagai landasan utamanya diperoleh dengan formula sebagai berikut

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{g(x)} \tag{9}$$

Dengan keterangan:

- $\pi(\theta)$: fungsi densitas dari distribusi prior, dengan tidak memperhitungkan informasi apa pun tentang data x
- $f(x|\theta)$: fungsi likelihood dari data x dengan diketahui parameter θ
- $\pi(\theta|x)$: fungsi densitas dari distribusi posterior apabila melihat informasi pada data x
- $g(x)$: fungsi densitas marginal dari data x

Dalam inferensi Bayesian, yang menjadi parameter utama adalah θ, maka $g(x)$ dianggap sebuah konstanta. Sehingga fungsi densitas dari distribusi *posterior* akan berbanding lurus dengan perkalian fungsi *likelihood* dan fungsi densitas dari distribusi *prior*, yang dapat dikonstruksikan sebagai

$$\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta) * \pi(\theta)$$
$$posterior \propto likelihood \times prior.$$

Inferensi Bayesian didefinisikan sebagai alat matematika untuk mengombinasikan pengetahuan terdahulu (*prior information*) dengan data observasi yang kemudian menjadi suatu pengetahuan yang baru (*posterior information*). Pengetahuan terdahulu yang digunakan dapat berupa pengalaman yang telah terjadi sebelumnya atau pendapat para ahli mengenai suatu kejadian. Inferensi Bayesian bersifat subjektif yang bergantung pada kepercayaan seseorang dalam memilih informasi prior-nya.

Dalam pemilihan distribusi prior, terdapat istilah informative prior dan non informative prior. Informative prior dipilih apabila informasi prior diketahui secara pasti yang memberikan pengaruh besar terhadap proses inferensi. Namun jika informasinya tidak cukup dipercaya, maka akan dipilih non informative prior yang memberikan pengaruh kecil terhadap proses inferensi. Dalam inferensi Bayesian, distribusi prior yang dipilih dapat diklasifikasikan menjadi dua yaitu conjugate prior dan nonconjugate prior. Conjugate prior adalah distribusi prior yang mengakibatkan distribusi posterior yang dibentuk terhadap fungsi likelihood yang diberikan memiliki kelas distribusi yang sama seperti distribusi prior. Sedangkan nonconjugate prior adalah distribusi prior yang dipilih tidak menyebabkan distribusi posterior berasal dari kelas distribusi yang sama.

Bayesian Chain Ladder Method

Bayesian *Chain Ladder Method* pada intinya adalah melakukan penerapan teori Bayesian pada metode *Chain Ladder* untuk memprediksi cadangan klaim. Penerapan teori Bayesian pada metode Mack *Chain Ladder* digunakan untuk memodelkan Bayesian *development factor*. Data klaim yang diamati diasumsikan berdistribusi Gamma karena distribusi Gamma merupakan distribusi kontinu untuk memodelkan data yang bernilai positif dan cocok untuk memodelkan data yang berhubungan dengan waktu tunggu. Distribusi Gamma digunakan untuk memodelkan $X_{i,j}$ yang merupakan besarnya klaim yang terjadi pada tahun kejadian i dan diselesaikan pada j tahun kemudian. Lalu akibat dari adanya *additive property* pada distribusi Gamma, total besarnya klaim yaitu $C_{i,j} = \sum_{k=0}^{j} X_{i,k}$ juga berdistribusi Gamma. Selanjutnya untuk memodelkan *development factor* terdahulu atau informasi *prior*, akan digunakan *prior conjugate* dimana diasumsikan mengikuti distribusi yang sama seperti datanya yaitu distribusi Gamma.

Asumsi model pada Bayesian *Chain Ladder Method*:

1. Untuk setiap tahun penundaan j $(0 \leq j \leq n-1)$, terdapat suatu konstanta tetap σ_j dengan $\sigma_j > 0$
2. Diberikan suatu peubah acak bersyarat $\left(C_{i,j+1} \middle| C_{i,0}, \ldots, C_{i,j}, \boldsymbol{\Theta}\right)$, dengan $\boldsymbol{\Theta} = (\Theta_0, \ldots, \Theta_{n-1})$ adalah suatu vektor acak dan $(C_{i,j})_{0 \leq j \leq n}$ adalah peubah acak total besarnya klaim yang terjadi pada tahun kejadian i dengan tahun penundaan j, yang saling bebas antara tahun kejadian i dengan distribusi sebagai berikut
$$\left(C_{i,j+1} \middle| C_{i,0}, \ldots, C_{i,j}, \boldsymbol{\Theta}\right) \sim \Gamma\left(C_{i,j}\sigma_j^{-2}, \frac{1}{\Theta_j \sigma_j^{-2}}\right)$$
3. Untuk setiap tahun penundaan j $(0 \leq j \leq n-1)$, komponen Θ_j pada $\boldsymbol{\Theta}$ diasumsikan saling bebas dengan distribusi sebagai berikut
$$\Theta_j \sim \Gamma\left(\gamma_j, \frac{1}{u_j * (\gamma_j - 1)}\right)$$
Dengan $u_j > 0$ dan $\gamma_j > 1$ merupakan suatu konstanta tetap
4. $\boldsymbol{\Theta} = (\Theta_0, \ldots, \Theta_{n-1})$ dan $C_{0,0}, \ldots, C_{n,0}$ adalah saling bebas dengan $C_{0,0}, \ldots, C_{n,0} > 0$

Berdasarkan asumsi-asumsi yang sudah dijabarkan di atas, berlaku sifat-sifat dari metode Bayesian *Chain Ladder* sebagai berikut

$$\mathbb{E}\left[C_{i,j+1} \middle| C_{i,0}, \ldots, C_{i,j}, \boldsymbol{\Theta}\right] = C_{i,j}\sigma_j^{-2} * \left(\frac{1}{\Theta_j \sigma_j^{-2}}\right) = C_{i,j}\Theta_j^{-1} \tag{10}$$

Selaras dengan metode Mack *Chain Ladder*, peranan Θ_j^{-1} serupa dengan f_j sebagai *development factor* dengan $\mathbb{E}\left[\Theta_j^{-1}\right] = u_j$ dimana $u_j > 0$ merupakan konstanta tetap.

$$Var\left[C_{i,j+1} \middle| C_{i,0}, \ldots, C_{i,j}, \boldsymbol{\Theta}\right] = C_{i,j}\sigma_j^{-2} * \left(\frac{1}{\Theta_j \sigma_j^{-2}}\right)^2 = \left(\Theta_j^{-1}\sigma_j\right)^2 C_{i,j} \tag{11}$$

Selaras juga dengan metode Mack *Chain Ladder*, peranan $\left(\Theta_j^{-1}\sigma_j\right)^2$ serupa dengan s_j^2 sebagai parameter pada variansi *cumulative claims* sehingga estimasi dari $\left(\Theta_j^{-1}\sigma_j\right)^2$ dapat diperoleh dari $\hat{s}_j^2$ yang didefinisikan pada metode Mack *Chain Ladder*.

Proses pembentukan Bayesian *Development Factor*:

1. Distribusi Prior

   Distribusi prior yang digunakan adalah distribusi dari Θ_j. Berdasarkan asumsi model diketahui bahwa ($\Theta_j \in \boldsymbol{\Theta}$) saling bebas sehingga fungsi densitas distribusi prior dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\pi(\boldsymbol{\theta}) = \pi(\theta_0, \dots, \theta_{n-1}) = \pi(\theta_0) \times \pi(\theta_1) \times \dots \times \pi(\theta_{n-1}) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\left(u_j * (\gamma_j - 1)\right)^{\gamma_j} \theta_j^{\gamma_j - 1} \exp\{-\theta_j u_j * (\gamma_j - 1)\}}{\Gamma(\gamma_j)}$$

2. Distribusi Data

   Fungsi densitas distribusi data diperoleh dari perkalian fungsi densitas setiap *cumulative claims* yang berada pada $\mathcal{D}$. Perlu diperhatikan bahwa cumulative claims untuk tahun penundaan ke-0 belum diikutsertakan, sehingga dibuatlah fungsi densitas dari $C_{i,j}$ untuk tahun penundaan $j = 0$, yang dinotasikan dengan $g(C_{0,0}, \dots, C_{n,0})$.

$$f(\mathcal{D}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=0}^{n-j-1} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\left(\theta_j \sigma_j^{-2}\right)^{C_{i,j}\sigma_j^{-2}} C_{i,j+1}^{\left(C_{i,j}\sigma_j^{-2}\right)-1} \exp\{-C_{i,j+1} * \left(\theta_j \sigma_j^{-2}\right)\}}{\Gamma\left(C_{i,j}\sigma_j^{-2}\right)} \times g(C_{0,0}, \dots, C_{n,0})$$

3. Distribusi Posterior

   Distribusi prior dan distribusi data yang sudah dibentuk dapat digunakan untuk mengonstruksikan distribusi posterior dengan persamaan berikut $h(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{D}) \propto f(\mathcal{D}|\boldsymbol{\theta}) \times \pi(\boldsymbol{\theta})$.

$$h(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{D}) \propto \prod_{j=0}^{n-1} \left[\theta_j^{\gamma_j + \left(\sum_{i=0}^{(n-j-1)} \frac{C_{i,j}}{\sigma_j^2}\right) - 1} e^{-\theta_j \left[u_j * (\gamma_j - 1) + \left(\sum_{i=0}^{(n-j-1)} \frac{C_{i,j+1}}{\sigma_j^2}\right)\right]} \right]$$

   Sehingga $\Theta_j|\mathcal{D}$ memiliki distribusi berikut

$$\Theta_j|\mathcal{D} \sim \Gamma\left(\gamma_j + \sum_{i=0}^{(n-j-1)} \frac{C_{i,j}}{\sigma_j^2}, \quad \frac{1}{u_j * (\gamma_j - 1) + \sum_{i=0}^{(n-j-1)} \frac{C_{i,j+1}}{\sigma_j^2}}\right)$$

Untuk mendapatkan Bayesian development factor akan dicari ekspektasi dari variabel acak pada distribusi posterior yaitu mencari $\mathbb{E}\left[\Theta_j^{-1} | \mathcal{D}\right]$.

$$\hat{f}_j^{BCL} = \mathbb{E}\left[\Theta_j^{-1} | \mathcal{D}\right] = (1 - \omega_j) * u_j + \omega_j \hat{f}_j^{MCL} \tag{12}$$

Dengan mendefinisikan bobot kepercayaan

$$\omega_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} + \sigma_j^2 * (\gamma_j - 1)} \in (0,1) \tag{13}$$

diketahui bahwa Bayesian development factor merupakan suatu kombinasi dari development factor pada distribusi prior (u_j) dengan estimasi development factor pada metode Mack *Chain Ladder* $\left(\hat{f}_j^{MCL}\right)$.

Prediksi ultimate claim menggunakan metode Bayesian Chain Ladder diperoleh melalui perkalian paid to date claims dengan perkalian dari setiap Bayesian development factor.

$$\hat{C}_{i,n}^{BCL} = C_{i,n-i} \prod_{j=n-i}^{n-1} \hat{f}_j^{BCL} \tag{14}$$

Prediksi cadangan klaim untuk setiap tahun kejadian i yang harus disediakan perusahaan asuransi dengan menggunakan metode Bayesian Chain Ladder diperoleh dari persamaan berikut

$$\hat{R}_i^{BCL} = \hat{C}_{i,n}^{BCL} - C_{i,n-i} \tag{15}$$

dan prediksi dari total cadangan klaim untuk semua tahun kejadian dimana $i = 1,2,3, \dots, n$ diperoleh sebagai berikut

$$\hat{R}^{BCL} = \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i^{BCL}. \tag{16}$$

Bahan dan Data

Data yang digunakan adalah data sekunder yang diperoleh dari laporan tahunan perusahaan asuransi umum di Amerika Serikat yang diterbitkan oleh *National Association of Insurance Commissioners (NAIC)* dengan judul "*Statistical Compilation of Annual Statement Information for Property/Casualty Insurance Companies in 2019*". Dalam laporan tersebut, akan digunakan data besar klaim pada *Workers Compensation* yang telah dibayarkan oleh perusahaan asuransi dalam mata uang Dollar (USD) pada tahun 2014 s.d. 2019. Terdapat data dari pengalaman cadangan klaim pada masa lalu yaitu pada tahun 2008 s.d. 2013 yang dianggap sebagai informasi prior.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk memperoleh estimasi Bayesian *development factor*, perlu melakukan perhitungan manual menggunakan persamaan $\hat{f}_j^{BCL} = \left(1 - \omega_j\right) * u_j + \omega_j \, \hat{f}_j^{MCL}$ dengan menetapkan bobot kepercayaan ω_j. Terangkum dalam tabel di bawah yaitu perbandingan hasil estimasi *development factor* dari kedua metode berdasarkan skema bobot kepercayaan berbeda yaitu ω_j =0,25 , ω_j =0,5 , dan ω_j =0,75.

TABEL 1. Perbandingan Estimasi *Development Factor* untuk Setiap Tahun

Tahun Penundaan (j)	***Development Factor***				
	Prior	*Mack* CL	**Bayesian CL** $(\omega_j = 0{,}25)$	**Bayesian CL** $(\omega_j = 0{,}5)$	**Bayesian CL** $(\omega_j = 0{,}75)$
0	1,370740	1,376035	1,372064	1,373388	1,374711
1	1,155260	1,152963	1,154686	1,154112	1,153538
2	1,084724	1,075829	1,082500	1,080276	1,078052
3	1,057038	1,042477	1,053398	1,049758	1,046117
4	1,040372	1,028810	1,037481	1,034591	1,031700

Berdasarkan TABEL 1, dapat dilihat bahwa dengan menggunakan asumsi bobot kepercayaan yang berbeda pada metode Bayesian Chain *Ladder*, dapat menghasilkan Bayesian *development factor* yang berbeda pula. Jika dipilih bobot kepercayaan $\omega_j = 0{,}25$ artinya tidak sepenuhnya mempercayai informasi dari data dan cenderung lebih percaya pada informasi masa lalu. Sehingga, hasil Bayesian *development factor* lebih dekat dengan *development factor* pada masa lalu (*prior*). Jika dipilih bobot kepercayaan $\omega_j = 0{,}5$ artinya mempercayai secara seimbang pada informasi dari data dan informasi masa lalu. Sehingga, hasil Bayesian *development factor* berada di tengah-tengah *development factor* pada masa lalu dan *development factor* pada data yang diamati dengan menggunakan metode Mack *Chain Ladder*. Jika dipilih bobot kepercayaan $\omega_j = 0{,}75$ artinya lebih mempercayai informasi dari data daripada informasi masa lalu. Sehingga, hasil Bayesian *development factor* lebih mendekati *development factor* pada data yang diamati dengan menggunakan metode Mack *Chain Ladder*. Sedangkan, perbandingan hasil prediksi cadangan klaim kedua metode dapat dilihat pada TABEL 2.

TABEL 2. Perbandingan Hasil Prediksi Cadangan Klaim

Tahun	**Tahun Kejadian**	**Cadangan Klaim**			
		Mack CL	**Bayesian CL** $(\omega_j = 0{,}25)$	**Bayesian CL** $(\omega_j = 0{,}5)$	**Bayesian CL** $(\omega_j = 0{,}75)$
2015	1	1,376035	1,372064	1,373388	1,374711
2016	2	1,152963	1,154686	1,154112	1,153538
2017	3	1,075829	1,082500	1,080276	1,078052
2018	4	1,042477	1,053398	1,049758	1,046117
2019	5	1,028810	1,037481	1,034591	1,031700
Total		**1.208.620**	**1.344.161**	**1.298.782**	**1.253.598**

Berdasarkan TABEL 2, diperoleh bahwa prediksi total cadangan klaim pada metode Bayesian *Chain Ladder* (dengan skema bobot kepercayaan yang berbeda) dan metode Mack *Chain Ladder* memberikan hasil yang berbeda, tetapi perbedaan tersebut tidak terlalu jauh. Hal ini diakibatkan karena *development factor* terdahulu yang digunakan dan *development factor* pada metode Mack *Chain Ladder* tidak jauh berbeda nilainya. Selain itu, dapat disimpulkan hasil prediksi cadangan klaim dengan menggunakan metode Bayesian *Chain Ladder* bersifat subjektif tergantung dari kepercayaan terhadap informasi prior yang digunakan dalam model.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan metode dan analisis yang telah dilakukan, Metode Bayesian *Chain Ladder* adalah metode yang menerapkan Teori Bayesian pada pembentukan *development factor* yang selanjutnya digunakan untuk memprediksi cadangan klaim. Bayesian *development factor* diperoleh dari kombinasi *development factor* pada distribusi *prior* dengan *development factor* pada metode Mack *Chain Ladder* menggunakan bobot kepercayaan tertentu $\omega_j \in (0{,}1)$. Karena bergantung pada bobot kepercayaan dalam mempertimbangkan informasi *prior*, prediksi cadangan klaim dengan menggunakan metode Bayesian *Chain Ladder* bersifat subjektif. Jika dipilih bobot kepercayaan mendekati satu $(\omega_j \to 1)$ artinya kepercayaan besar diberikan pada data yang diamati, maka hasil prediksi cadangan klaim dengan metode Bayesian *Chain Ladder* akan mendekati hasil prediksi cadangan klaim dengan metode Mack *Chain Ladder*.

REFERENSI

Antonio, K., Beirlant, J., Hoedemakers, T., & Verlaak, R. (2006). Lognormal Mixed Models for Reported Claims Reserves. North American Actuarial Journal, 10(1), 30–48. https://doi.org/10.1080/10920277.2006.10596238

Bolstad, W. M., & Curran, J. M. (2016). Introduction to Bayesian Statistics (3rd ed.). Wiley.

Gisler, A., & Wüthrich, M. V. (2008). Credibility for the Chain Ladder Reserving Method. ASTIN Bulletin, 38(02), 565–600. https://doi.org/10.2143/ast.38.2.2033354

Hoff, P. D. (2009). A First Course in Bayesian Statistical Methods. Springer Publishing

Hogg, R. V., Craig, A. T., & McKean, J. W. (2019). Introduction to Mathematical Statistics (8th ed.). Boston: Pearson

Klugman, S.A., Panjer, H.H. and Willmot, G.E, 2019. Loss Models: from data to decisions (5th ed.). John Wiley & Sons.

Lambert, B. (2018). A Student's Guide to Bayesian Statistics (1st ed.). SAGE Publications Ltd.

Mack, T. (1993). Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates. ASTIN Bulletin, 23(2), 213–225. https://doi.org/10.2143/ast.23.2.2005092

Mack, T. (1993). Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates. In Casualty Actuarial Society Forum (Vol. 1, No. 1, pp.101-83).

Naic. (2020). Property/Casualty Statistical Compilation. National Association of Insurance Commissioners.

Naic. (2015). Statistical Compilation of Annual Statement Information - Property/Casualty (2014). National Association of Insurance Commissioners

Olofsson, M. (2006). Stochastic Loss Reserving Testing the New Guidelines from the Australian Prudential Regulation Authority (APRA) on Swedish Portfolio Data Using a Bootstrap Simulation and Distribution-Free Method by Thomas Mack. Springer

Peters, G. W., Targino, R. S., & Wüthrich, M. V. (2017). Full Bayesian analysis of claims reserving uncertainty. Insurance: Mathematics and Economics, 73, 41–53. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2016.12.007

Wüthrich, M. V., & Merz, M. (2008). Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance. Wiley.

Wuthrich, M. V., & Merz, M. (2015). Stochastic Claims Reserving Manual: Advances in Dynamic Modeling. SSRN Electronic Journal, 11–54. https://doi.org/10.2139/ssrn.2649057