

Received: 27 April 2022

Revised: 12 June 2022

Accepted: 26 June 2022

Published: 30 June 2022

Model Kredibilitas Bühlmann Berdasarkan Data Terpancung

Vicko Regenio Widodo^{1, a)}, Siti Nurrohmah^{1, b)}, Sindy Devila^{1, c)}

¹Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia

Email: ^{a)}vicko.regenio@sci.ui.ac.id, ^{b)}snurrohmah@sci.ui.ac.id, ^{c)}sindy@sci.ui.ac.id

Abstract

Everyone must face risk in the future. To minimize losses due to this risk, someone can buy an insurance. Insurance requires policyholder to pay premiums periodically. One of the models that can be used in determining the premium is the Bühlmann credibility model. This paper discusses a credibility model which is based on the Bühlmann credibility model but involves truncation of the loss data in the p -th and q -th quantile. This model uses the trimmed mean, which is the expected loss for a certain risk, provided that the loss is truncated on the p -th and q -th quantiles. This model has several advantages, one of that is the credibility premium obtained is less affected by outliers. The discussion in this paper focuses on the elaboration of the theoretical results to build a credibility model based on truncation data and parameter estimation using non-parametric methods on the credibility model based on truncation data. This model is implemented on a sample of ordered data. This sample is the loss for thirty individuals with a period of 20 years which have been sorted from smallest to largest. The analysis is carried out on the calculation of model parameters in various cases. In addition, a comparison of premium sensitivity on the credibility model based on truncation data and the Bühlmann credibility model is discussed if there is an outlier. Based on the results, this model can determine risk loading and is less affected by an outlier compared to the Bühlmann credibility model.

Keywords: Bühlmann credibility model, non-parametric methods, ordered losses, quantiles, trimmed mean

Abstrak

Setiap orang pasti menghadapi suatu risiko di masa depan. Seseorang dapat mengurangi besarnya kerugian akibat risiko tertentu dengan membeli asuransi. Asuransi mewajibkan seorang pemegang polis membayar premi secara periodik. Salah satu model yang dapat digunakan dalam penentuan premi adalah model kredibilitas Bühlmann. Artikel ini membahas model kredibilitas yang didasarkan pada model kredibilitas Bühlmann tetapi melibatkan pemancungan data kerugian asli di kuantil ke- p dan kuantil ke- q . Model ini menggunakan *trimmed mean* untuk memprediksi besar kerugian di periode berikutnya yaitu ekspektasi kerugian untuk suatu risiko tertentu dengan syarat kerugian tersebut sudah terpancung. Model kredibilitas ini memiliki beberapa kelebihan, salah satunya yaitu premi kredibilitas yang didapat tidak terlalu terpengaruh terhadap *outlier*. Pembahasan pada artikel ini berfokus pada penjabaran hasil teoritis untuk membangun model

kredibilitas berdasarkan data terpancung dan pengestimasi parameter dengan menggunakan metode non-parametrik pada model kredibilitas berdasarkan data terpancung. Model kredibilitas berdasarkan data terpancung ini diimplementasikan pada suatu sampel data kerugian terurut. Sampel ini merupakan data kerugian asli untuk 30 individu dengan periode 20 tahun yang telah diurutkan dari yang terkecil hingga terbesar. Analisis dilakukan terhadap perhitungan parameter model di berbagai kasus. Selain itu, dibahas perbandingan sensitivitas premi pada model kredibilitas berdasarkan data terpancung dan model kredibilitas Bühlmann jika terdapat *outlier*. Berdasarkan hasil penelitian, model kredibilitas berdasarkan data terpancung dapat menentukan *risk loading* dan tidak terlalu terpengaruh terhadap *outlier* dibandingkan dengan model kredibilitas Bühlmann.

Kata-kata kunci: kerugian terurut, kuantil, non-parametrik, model kredibilitas Bühlmann, *trimmed mean*

PENDAHULUAN

Risiko adalah suatu kondisi yang memiliki kemungkinan terjadi penyimpangan dari hasil yang diharapkan dan kondisi ini dapat mengakibatkan kerugian (Vaughan and Vaughan, 2014). Seseorang dapat mengurangi besarnya kerugian dengan membeli asuransi, dimana dengan membeli asuransi sama dengan mentransfer risiko ke pihak penanggung (perusahaan asuransi). Yustisia (2014) menyatakan bahwa asuransi adalah perjanjian antara pihak penanggung dan pihak tertanggung dimana dengan mendapatkan premi maka pihak penanggung berkewajiban memberikan manfaat kepada pihak tertanggung jika mengalami suatu risiko. Besarnya premi antara satu individu dengan individu lainnya belum tentu sama karena beberapa faktor. Aktuaris perlu menentukan besar premi agar dapat menutup kerugian yang ditanggung oleh perusahaan. Salah satu metode yang dapat digunakan dalam penentuan premi adalah teori kredibilitas. Metode ini menentukan premi dengan cara mengevaluasi data kerugian masa lalu.

Klugman et al. (2019) menyatakan bahwa teori kredibilitas yang pertama kali digunakan adalah kredibilitas fluktuasi terbatas (*limited fluctuation credibility*) yang diperkenalkan oleh Mowbray pada tahun 1914. Teori ini menggunakan pendekatan dengan menentukan apakah kredibilitas tersebut merupakan kredibilitas penuh, kredibilitas parsial atau tanpa kredibilitas lalu menggunakannya untuk menghitung premi. Teori yang selanjutnya digunakan adalah teori *greatest accuracy credibility*. Teori ini dibuat karena teori sebelumnya menganggap bahwa risiko setiap orang adalah homogen sedangkan pada kenyataannya terdapat beberapa orang yang memiliki risiko berbeda (heterogen). Pada tahun 1967, Bühlmann melakukan pendekatan alternatif dengan menggunakan *hypothetical mean* untuk memprediksi besar kerugian di periode berikutnya. *Hypothetical mean* merupakan ekspektasi kerugian untuk suatu risiko tertentu dan ditaksir menggunakan kombinasi linier dari data kerugian masa lalu.

Dalam beberapa dekade terakhir, berbagai pendekatan lain dari model kredibilitas Bühlmann telah banyak dikembangkan dalam literatur kredibilitas. Pada tahun 1976, De Vylder menemukan ide dengan melakukan pemancung data kerugian asli pada model kredibilitas Bühlmann. Model ini dinamakan model kredibilitas semilinier. Model kredibilitas semilinier ini mengasumsikan bahwa penaksir *hypothetical mean* adalah kombinasi linier dari data kerugian masa lalu yang sudah terpancung (Bühlmann and Gisler, 2005). Pitselis (2013) menggabungkan kuantil ke dalam model kredibilitas Bühlmann dan model kredibilitas regresi Hachemeister. Selanjutnya, Kim and Jeon (2013) mengembangkan sebuah model kredibilitas yang didasarkan pada model kredibilitas Bühlmann tetapi melibatkan pemancung data kerugian asli di titik kuantil ke- p dan kuantil ke- q . Model ini tidak menggunakan *hypothetical mean* melainkan menggunakan *trimmed mean* yaitu ekspektasi kerugian untuk suatu risiko tertentu dengan syarat kerugian tersebut sudah terpancung.

Terdapat beberapa keuntungan menggunakan *trimmed mean* daripada *hypothetical mean*. Pertama, dengan melakukan pemancung kanan maka premi kredibilitas yang didapat tidak terlalu terpengaruh terhadap kerugian yang sangat besar (*outlier*). Kedua, dengan melakukan pemancung kiri, maka akan memberikan dasar yang kuat untuk menentukan *risk loading*. *Risk loading* adalah besar premi yang dibebankan kepada pihak tertanggung yang nilainya lebih besar dari premi dasar. Terakhir,

dengan memvariasikan nilai (p, q) maka aktuaris dapat menghitung besar premi untuk berbagai nilai p dan q lalu memeriksa sensitivitas preminya. Artikel ini membahas pembentukan model kredibilitas berdasarkan data terpancung yang telah diperkenalkan oleh Kim and Jeon pada tahun 2013. Pengestimasi parameter yang digunakan tidak berfokus pada metode parametrik seperti di Kim and Jeon (2013) melainkan menggunakan metode non-parametrik. Penggunaan metode ini merujuk pada pembahasan yang dilakukan oleh Klugman et al. tahun 2019 tentang pengestimasi parameter model kredibilitas Bühlmann menggunakan metode non-parametrik. Tsai and Lin (2017) menggunakan pendekatan non-parametrik pada kredibilitas Bühlmann untuk memperkirakan tingkat kematian. Alasan pemilihan metode non-parametrik karena cocok untuk data yang mengandung *outlier* (Conover, 1999). Metode non-parametrik juga hanya memerlukan asumsi yang lebih sederhana dibandingkan metode parametrik (Čížek and Sadıkoğlu, 2020). Artikel ini juga membahas perhitungan besar premi untuk model kredibilitas berdasarkan data terpancung menggunakan suatu data yang dibangkitkan.

METODOLOGI

Bahan dan Data

Data yang digunakan dalam artikel ini adalah sampel data kerugian yang dibuat sendiri oleh penulis. Data ini merupakan kumpulan sampel besar kerugian untuk 30 individu dimana setiap individu mempunyai periode kerugian yang sama yaitu 20 tahun. Pembuatan, pengolahan dan analisis data dilakukan dengan menggunakan *software Microsoft 365 Excel*. Data dibuat secara manual dengan menggunakan fungsi *RANDBETWEEN* untuk interval tertentu dimana untuk setiap individu, interval yang digunakan pada fungsi *RANDBETWEEN* berbeda-beda.

Metode Penelitian

Pembentukan Model Kredibilitas Berdasarkan Data Terpancung

Pada bagian ini akan dibahas mengenai pembentukan model kredibilitas berdasarkan data terpancung yang diperkenalkan oleh Kim and Jeon pada tahun 2013. Misalkan Θ merupakan variabel acak untuk risiko seorang individu dan X adalah variabel acak untuk kerugiannya yang memiliki distribusi bergantung dengan tingkat risiko itu sendiri yaitu distribusi dengan pdf $f_{X|\Theta}(x|\theta)$. Misalkan juga, untuk setiap individu, kerugian masa lalu selama n periode dinyatakan dalam X_1, \dots, X_n . Asumsikan untuk $j = 1, \dots, n$, kerugian X_j iid dengan mean dari X_j bersyarat Θ sama dan begitu juga untuk variansi dari X_j bersyarat Θ sama. Untuk keperluan di pembahasan berikutnya, besar kerugian masa lalu selama n periode dinyatakan dalam $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ dimana $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ dan $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Trimmed mean merupakan ekspektasi dari kerugian bersyarat tingkat risiko tertentu dimana kerugian tersebut sudah terpancung. Artikel ini akan membahas model kredibilitas dengan pemancungan data kerugian asli di kuantil ke- p dan q . Oleh karena itu, apabila kuantil ke- p didefinisikan sebagai berikut:

$$Q_p(X|\theta) = F^{-1}(p), 0 < p < 1$$

maka *trimmed mean* secara matematis dapat ditulis sebagai:

$$\mu_{p,q}(\theta) = E[X|Q_p(X|\theta) < X < Q_q(X|\theta); \Theta = \theta]$$

Jika sampel data kerugian asli diberikan selama n periode, dengan asumsi np dan nq adalah bilangan bulat, maka *trimmed mean* secara empiris dapat ditulis sebagai:

$$t_{p,q}(\mathbf{X}) = \frac{\sum_{k=np+1}^{nq} X_{(k)}}{n(q-p)}.$$

dimana $0 \leq p < q \leq 1$ dan $X_{(k)}$ menyatakan kerugian asli terurut (dari terkecil hingga terbesar) ke- k .

Oleh karena itu, akan didefinisikan notasi-notasi yang akan digunakan pada model kredibilitas ini yaitu sebagai berikut:

1. $t_{p,q}(\mathbf{X})$ menyatakan *trimmed mean* empiris dari kerugian setiap individu.
2. $\mu_{p,q}(\theta)$ menyatakan *trimmed mean* dari kerugian setiap individu.
3. $\mu_{p,q}$ menyatakan ekspektasi dari *trimmed mean* yang telah didefinisikan pada poin kedua sehingga dapat dituliskan sebagai $\mu_{p,q} = E[\mu_{p,q}(\Theta)]$.
4. $a_{p,q}$ menyatakan variansi dari *trimmed mean* yang telah didefinisikan pada poin kedua sehingga dapat dituliskan sebagai $a_{p,q} = \text{Var}(\mu_{p,q}(\Theta))$.
5. $Z_{p,q}$ menyatakan faktor kredibilitas untuk model berdasarkan data terpancung.

Asumsi yang digunakan yaitu penaksir dari $\mu_{p,q}(\theta)$ adalah $\alpha + \beta t_{p,q}(\mathbf{X})$ sehingga model kredibilitas dengan data terpancung dibentuk dengan meminimumkan *expected square loss* sebagai berikut:

$$Q = E \left[\left(\mu_{p,q}(\Theta) - \alpha - \beta t_{p,q}(\mathbf{X}) \right)^2 \right]. \quad (1)$$

Selanjutnya akan dicari nilai $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ yang merupakan nilai α dan β yang meminimalkan Q pada persamaan (1). Nilai $\hat{\alpha}$ diperoleh dengan melakukan penurunan parsial Q terhadap α dan nilai $\hat{\beta}$ diperoleh dengan melakukan penurunan parsial Q terhadap β sehingga akan didapatkan:

$$\hat{\alpha} = \mu_{p,q} - \frac{\text{Cov}(\mu_{p,q}(\Theta), t_{p,q}(\mathbf{X}))}{\text{Var}(t_{p,q}(\mathbf{X}))} E[t_{p,q}(\mathbf{X})] \text{ dan } \hat{\beta} = \frac{\text{Cov}(\mu_{p,q}(\Theta), t_{p,q}(\mathbf{X}))}{\text{Var}(t_{p,q}(\mathbf{X}))}.$$

Oleh karena itu, premi kredibilitas untuk model berdasarkan data terpancung dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_{p,q} &= \hat{\alpha} + \hat{\beta} t_{p,q}(\mathbf{X}) \\ &= \mu_{p,q} - \frac{\text{Cov}(\mu_{p,q}(\Theta), t_{p,q}(\mathbf{X}))}{\text{Var}(t_{p,q}(\mathbf{X}))} E[t_{p,q}(\mathbf{X})] + \frac{\text{Cov}(\mu_{p,q}(\Theta), t_{p,q}(\mathbf{X}))}{\text{Var}(t_{p,q}(\mathbf{X}))} t_{p,q}(\mathbf{X}). \end{aligned} \quad (2)$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa *trimmed mean* merupakan *functional* karena merupakan fungsi dari cdf atau pdf (Staudte and Sheather, 1990). Perhatikan juga bahwa $t_{p,q}(\mathbf{X})|\Theta$ merupakan estimator dari $\mu_{p,q}(\theta)$ sehingga mempunyai *asymptotic normality* sebagai berikut (Kim and Jeon, 2013):

$$\sqrt{n} \left(t_{p,q}(\mathbf{X})|\Theta - \mu_{p,q}(\theta) \right) \xrightarrow{D} N \left(0, v_{p,q}(\theta) \right).$$

dimana $v_{p,q}(\theta)$ adalah *asymptotic variance* untuk *trimmed mean*.

Oleh karena itu, akan didapatkan:

$$E[t_{p,q}(\mathbf{X})|\Theta] \rightarrow \mu_{p,q}(\theta) \text{ dan } n\text{Var}(t_{p,q}(\mathbf{X})|\Theta) \rightarrow v_{p,q}(\theta). \quad (3)$$

Saat $n \rightarrow \infty$ maka persamaan (3) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$E[t_{p,q}(\mathbf{X})|\Theta] = \mu_{p,q}(\theta) \text{ dan } \text{Var}[t_{p,q}(\mathbf{X})|\Theta] = \frac{v_{p,q}(\theta)}{n}. \quad (4)$$

Dengan melakukan beberapa penurunan maka akan didapatkan kovariansi dari $\mu_{p,q}(\theta)$ dan $t_{p,q}(\mathbf{X})$ adalah:

$$\text{Cov}(\mu_{p,q}(\theta), t_{p,q}(\mathbf{X})) = a_{p,q}. \quad (5)$$

Berdasarkan teorema tentang ekspektasi bersyarat dan variansi bersyarat maka ekspektasi dari *trimmed mean* empiris didefinisikan sebagai:

$$E[t_{p,q}(\mathbf{X})] = E[E[t_{p,q}(\mathbf{X})|\Theta]] = \mu_{p,q} \quad (6)$$

dan variansi dari *trimmed mean* empiris didefinisikan sebagai:

$$\text{Var}(t_{p,q}(\mathbf{X})) = E[\text{Var}(t_{p,q}(\mathbf{X})|\Theta)] + \text{Var}(E[t_{p,q}(\mathbf{X})|\Theta]). \quad (7)$$

Selanjutnya, dengan mendefinisikan:

$$v_{p,q} = E[v_{p,q}(\Theta)]$$

dan melakukan substitusi persamaan (4) ke persamaan (7) maka akan didapatkan:

$$\text{Var}(t_{p,q}(\mathbf{X})) = \frac{v_{p,q}}{n} + a_{p,q}. \quad (8)$$

Oleh karena itu, dengan menyubstitusikan persamaan (5), (6) dan (8) ke persamaan (2), maka persamaan (2) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$P_{p,q} = (1 - Z_{p,q})\mu_{p,q} + Z_{p,q}t_{p,q}(\mathbf{X}) \quad (9)$$

dimana

$$Z_{p,q} = \frac{n}{n + \frac{v_{p,q}}{a_{p,q}}}, \quad 0 < Z_{p,q} < 1.$$

Pengestimasian Parameter pada Model Kredibilitas dengan Metode Non-parametrik

Perhatikan pada bagian sebelumnya terdapat parameter yang nilainya belum diketahui seperti $\mu_{p,q}$, $v_{p,q}$, dan $a_{p,q}$ dan diperlukan pengestimasian untuk parameter-parameter tersebut. Pada bagian ini akan digunakan metode non-parametrik untuk mengestimasi parameter-parameter tersebut. Alasan dari pemilihan metode non-parametrik karena data yang akan digunakan tidak memerlukan asumsi mengenai distribusi dan metode non-parametrik cocok untuk data yang mengandung *outlier* dibandingkan metode parametrik (Conover, 1999).

Misalkan terdapat r individu. Misalkan juga kerugian untuk individu ke- i pada periode ke- j dinyatakan dalam X_{ij} dimana $i = 1, \dots, r$ dan $j = 1, \dots, n$. *Trimmed mean* empiris dari kerugian individu ke- i dinotasikan sebagai:

$$t_{p,q}^{(i)}(\mathbf{X}) = \frac{\sum_{k=np+1}^{nq} X_{(ik)}}{n(q-p)} \quad (10)$$

dimana np, nq adalah bilangan bulat dan $X_{(ik)}$ menyatakan kerugian asli terurut ke- k untuk individu ke- i . Selanjutnya definisikan $\hat{v}_{p,q}^{(i)}$ menyatakan estimator dari $v_{p,q}(\Theta)$ untuk individu ke- i yang akan dibahas pada bagian-bagian berikutnya. Estimator dari $\mu_{p,q}$, $v_{p,q}$, dan $a_{p,q}$ didefinisikan sebagai:

$$\hat{\mu}_{p,q} = T_{p,q}(\mathbf{X}) = \frac{\sum_{i=1}^r t_{p,q}^{(i)}(\mathbf{X})}{r}, \quad (11)$$

$$\hat{v}_{p,q} = \frac{\sum_{i=1}^r \hat{v}_{p,q}^{(i)}}{r}, \quad (12)$$

$$\hat{a}_{p,q} = \text{Var}(t_{p,q}^{(i)}(\mathbf{X})) - \frac{\hat{v}_{p,q}}{n}. \quad (13)$$

Oleh karena itu, premi kredibilitas untuk individu ke- i dapat diestimasi melalui persamaan sebagai berikut:

$$\hat{P}_{p,q}^{(i)} = (1 - \hat{Z}_{p,q})T_{p,q}(\mathbf{X}) + \hat{Z}_{p,q}t_{p,q}^{(i)}(\mathbf{X}) \quad (14)$$

dimana $\hat{Z}_{p,q} = \frac{n}{n + \frac{\hat{v}_{p,q}}{\hat{a}_{p,q}}}$

Pengestimasi Kuantil

Misalkan $\hat{Q}_\alpha^{(i)}$ menyatakan kuantil empiris ke- α untuk kerugian individu ke- i . $\hat{Q}_\alpha^{(i)}$ merupakan estimator dari Q_α dimana Q_α adalah kuantil untuk variabel acak kerugian tipe kontinu. Dengan asumsi bahwa $n\alpha$ adalah bilangan bulat maka kuantil empiris ke- α untuk kerugian asli terurut individu ke- i dapat diperoleh sebagai (Hogg et al., 2019):

$$\hat{Q}_\alpha^{(i)} = X_{(i(n\alpha))}, 0 < \alpha < 1$$

dimana $X_{(i(n\alpha))}$ adalah sampel kerugian asli terurut ke- $n\alpha$ untuk individu ke- i .

Pengestimasi Asymptotic Variance untuk Trimmed Mean

Pengestimasi ini didasarkan pada penurunan yang dilakukan oleh Kim and Jeon (2013) serta Staudte and Sheather (1990). Penurunan ini menghasilkan bentuk tertutup untuk mengestimasi $v_{p,q}(\theta)$. Perhatikan bahwa *trimmed mean* merupakan salah satu contoh dari *functional* karena merupakan fungsi dari cdf atau pdf (Staudte and Sheather, 1990). Berdasarkan sifat *influence function*, $v_{p,q}(\theta)$ akan didapatkan dengan mencari $E[IF^2(X)]$. Oleh karena itu, pertama-tama akan dicari *influence function* (IF) dari *trimmed mean* yang dapat diperoleh dengan melakukan penurunan *functional trimmed mean* dengan ϵ terhadap ϵ di 0. IF dari kuantil ke- q didefinisikan sebagai:

$$IF_{Q_q}(x) = \begin{cases} \frac{q-1}{f(F^{-1}(q))}, & x < Q_q \\ 0, & x = Q_q \\ \frac{q}{f(F^{-1}(q))}, & x > Q_q. \end{cases} \quad (15)$$

Berdasarkan definisi *trimmed mean* maka akan didapatkan:

$$\mu_{p,q}(F) = \int_{F^{-1}(p)}^{F^{-1}(q)} \frac{t}{q-p} dF(t).$$

Selanjutnya definisikan:

$$F_\epsilon(t) = (1 - \epsilon)F(t) + \epsilon\Delta_x(t). \quad (16)$$

Oleh karena itu, dengan persamaan (16), maka akan didapatkan:

$$\mu_{p,q}(F_\epsilon) = \frac{1 - \epsilon}{q - p} \int_{F_\epsilon^{-1}(p)}^{F_\epsilon^{-1}(q)} t dF(t) + \epsilon \frac{x}{q - p} I(F_\epsilon^{-1}(p) < x < F_\epsilon^{-1}(q)) \quad (17)$$

dimana $I(F_\epsilon^{-1}(p) < x < F_\epsilon^{-1}(q)) = 1$ jika $F_\epsilon^{-1}(p) < x < F_\epsilon^{-1}(q)$ dan 0 untuk lainnya. Selanjutnya turunkan persamaan (17) terhadap ϵ dan menetapkan $\epsilon = 0$ sehingga IF dari *trimmed mean* akan didapatkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{IF}_{\mu_{p,q}}(x) = & -\mu_{p,q}(F) + \frac{1}{q-p} [Q_q f(Q_q) \text{IF}_{Q_q}(x) - Q_p f(Q_p) \text{IF}_{Q_p}(x)] \\ & + \frac{x}{q-p} I(Q_p < x < Q_q) \end{aligned} \quad (18)$$

dimana $\text{IF}_{Q_\alpha}(x)$ adalah IF dari kuantil pada persamaan (15).

Berdasarkan persamaan (15) dan persamaan (18), *influence function* untuk *trimmed mean* dapat dinyatakan sebagai:

$$\text{IF}_{\mu_{p,q}}(x) = \begin{cases} -\mu_{p,q}(F) + \frac{[(q-1)Q_q - (p-1)Q_p]}{q-p}, & x < Q_p \\ -\mu_{p,q}(F) + \frac{[(q-1)Q_q - pQ_p]}{q-p} + \frac{x}{q-p}, & Q_p < x < Q_q \\ -\mu_{p,q}(F) + \frac{[qQ_q - pQ_p]}{q-p}, & x > Q_q. \end{cases} \quad (19)$$

Berdasarkan persamaan (19) maka akan didapat *asymptotic variance* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E[\text{IF}_{\mu_{p,q}}^2(X)] = & \frac{p}{(q-p)^2} [(q-1)(Q_q - \mu_{p,q}(F)) - (p-1)(Q_p - \mu_{p,q}(F))]^2 \\ & + \frac{1}{q-p} [(q-1)(Q_q - \mu_{p,q}(F)) - p(Q_p - \mu_{p,q}(F))]^2 + \frac{1}{q-p} \sigma_{p,q}^2(F) \\ & + \frac{1-q}{(q-p)^2} [q(Q_q - \mu_{p,q}(F)) - p(Q_p - \mu_{p,q}(F))]^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Persamaan (20) menunjukkan bahwa, di bawah model parametrik, $v_{p,q}(\Theta)$ ditaksir oleh $E[\text{IF}_{\mu_{p,q}}^2(X)]$ dimana kuantil, *trimmed mean* dan *trimmed variance* berasal dari model. Untuk metode non-parametrik, versi empiris dari persamaan (20) dapat digunakan dengan mengganti kuantil, *trimmed mean* dan *trimmed variance* model dengan versi empirisnya (Kim and Jeon, 2013). Oleh karena itu, estimator dari $v_{p,q}(\Theta)$ untuk individu ke- i yang dinotasikan sebagai $\hat{v}_{p,q}^{(i)}$ adalah:

$$\begin{aligned} \hat{v}_{p,q}^{(i)} = & \frac{1}{q-p} \hat{\sigma}_{p,q}^{2(i)} + \frac{p}{(q-p)^2} [(q-1)(\hat{Q}_q^{(i)} - t_{p,q}^{(i)}(\mathbf{X})) - (p-1)(\hat{Q}_p^{(i)} - t_{p,q}^{(i)}(\mathbf{X}))]^2 \\ & + \frac{1}{q-p} [(q-1)(\hat{Q}_q^{(i)} - t_{p,q}^{(i)}(\mathbf{X})) - p(\hat{Q}_p^{(i)} - t_{p,q}^{(i)}(\mathbf{X}))]^2 \\ & + \frac{1-q}{(q-p)^2} [q(\hat{Q}_q^{(i)} - t_{p,q}^{(i)}(\mathbf{X})) - p(\hat{Q}_p^{(i)} - t_{p,q}^{(i)}(\mathbf{X}))]^2 \end{aligned} \quad (21)$$

dengan $\hat{\sigma}_{p,q}^{2(i)}$ adalah *trimmed variance* empiris dari kerugian individu ke- i adalah:

$$\hat{\sigma}_{p,q}^{2(i)} = \frac{\sum_{k=np+1}^{nq} (X_{(ik)} - t_{p,q}^{(i)}(\mathbf{X}))^2}{n(q-p) - 1}. \quad (22)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dilakukan perhitungan besar premi model kredibilitas menggunakan data kerugian asli yang telat dibuat. Sebelum dilakukan perhitungan besar premi, akan terlebih dahulu dilakukan perhitungan parameter-parameter yang diperlukan seperti $t_{p,q}^{(i)}(\mathbf{X})$, $T_{p,q}(\mathbf{X})$, $\hat{v}_{p,q}$,

$\text{Var}(t_{p,q}^{(i)}(X))$, dan $\hat{a}_{p,q}$. Pembahasan akan dibagi menjadi tiga kasus yaitu kasus pertama dengan menetapkan nilai $p = 0$ dan memvariasikan nilai q , kasus kedua dengan menetapkan nilai $q = 1$ dan memvariasikan nilai p lalu kasus ketiga dengan menetapkan nilai p dan q sedemikian sehingga $0 < p < q < 1$.

Kasus 1: $p = 0$

Kasus 1 dibuat dengan menetapkan nilai $p = 0$ dan memvariasikan nilai q dengan $q = 0,2, 0,4, 0,6, 0,8$ atau 1. Hasil perhitungan parameter-parameter model pada kasus 1 dapat dilihat pada TABEL 1.

TABEL 1. Nilai parameter model kredibilitas berdasarkan data terpancung untuk kasus 1

Model kredibilitas berdasarkan data terpancung, $p = 0$					
q	$T_{0,q}(X)$	$\hat{v}_{0,q}$	$\text{Var}(t_{0,q}^{(i)}(X))$	$\hat{a}_{0,q}$	$\hat{z}_{0,q}$
0,2	5.727.758	5.816.632.983.333	39.998.425.855.532	39.707.594.206.365	0,9927
0,4	6.245.450	4.340.289.695.089	43.795.294.253.879	43.578.279.769.125	0,9950
0,6	6.705.161	5.026.029.913.889	47.066.320.773.436	46.815.019.277.741	0,9947
0,8	7.231.077	5.374.557.033.322	51.367.256.533.320	51.098.528.681.654	0,9948
1	7.766.398	4.430.037.190.789	56.185.944.201.808	55.964.442.342.268	0,9961

Selanjutnya, dilakukan perhitungan premi kredibilitas pada kasus 1 untuk individu pertama. Kesimpulan yang didapat adalah premi kredibilitas pada kasus 1 untuk individu pertama akan meningkat saat q meningkat menuju 1.

Kasus 2: $q = 1$

Kasus 2 dibuat dengan menetapkan nilai $q = 1$ dan memvariasikan nilai p dengan $p = 0, 0,2, 0,4, 0,6$ atau 0,8. Hasil perhitungan parameter-parameter model pada kasus 2 dapat dilihat pada TABEL 2.

TABEL 2. Nilai parameter model kredibilitas berdasarkan data terpancung untuk kasus 2

Model kredibilitas berdasarkan data terpancung, $q = 1$					
p	$T_{p,1}(X)$	$\hat{v}_{p,1}$	$\text{Var}(t_{p,1}^{(i)}(X))$	$\hat{a}_{p,1}$	$\hat{z}_{p,1}$
0	7.766.398	4.430.037.190.789	56.185.944.201.808	55.964.442.342.268	0,9960
0,2	8.276.058	5.543.223.555.490	61.361.043.638.452	61.083.882.460.677	0,9955
0,4	8.780.364	6.996.935.092.298	66.552.048.814.887	66.202.202.060.272	0,9947
0,6	9.358.254	7.064.441.920.126	73.287.172.175.090	72.933.950.079.084	0,9952
0,8	9.907.683	4.962.135.955.556	80.120.259.758.333	79.872.152.960.556	0,9969

Selanjutnya, dilakukan perhitungan premi kredibilitas pada kasus 2 untuk individu pertama. Kesimpulan yang didapat adalah premi kredibilitas untuk individu pertama pada kasus 2 akan semakin meningkat saat p meningkat. Oleh karena itu dengan menetapkan nilai $p > 0$ maka akan didapatkan nilai premi yang lebih besar daripada premi dasar ($\hat{P}_{0,1}^{(1)}$) atau biasa disebut dengan *risk loading* dan penentuan premi tersebut mempunyai dasar dan perhitungan yang jelas.

Kasus 3: $0 < p < q < 1$

Kasus 3 dibuat dengan menetapkan nilai $0 < p < q < 1$. Pertama dengan menetapkan nilai $p = 0,2$ dan $q = 0,8$ lalu menetapkan nilai $p = 0,4$ dan $q = 0,6$. Hasil perhitungan parameter-parameter model pada kasus 3 dapat dilihat pada TABEL 3.

TABEL 3. Perbandingan nilai parameter model kredibilitas berdasarkan data terpancung dengan $p = 0,2, q = 0,8$ dan $p = 0,4, q = 0,6$

Parameter Model Kredibilitas Berdasarkan Data Terpancung, $p = 0,2$ dan $q = 0,8$		Parameter Model Kredibilitas Berdasarkan Data Terpancung, $p = 0,4$ and $q = 0,6$	
$T_{0,2,0,8}(X)$	7.732.183	7.624.583	$T_{0,4,0,6}(X)$
$\hat{v}_{0,2,0,8}$	14.221.583.863.533	12.973.542.855.556	$\hat{v}_{0,4,0,6}$
$\text{Var}(t_{0,2,0,8}^{(i)}(X))$	56.064.546.146.743	54.743.573.156.609	$\text{Var}(t_{0,4,0,6}^{(i)}(X))$
$\hat{a}_{0,2,0,8}$	55.353.466.953.567	54.094.896.013.831	$\hat{a}_{0,4,0,6}$
$\hat{z}_{0,2,0,8}$	0,9873	0,9882	$\hat{z}_{0,4,0,6}$

Berdasarkan TABEL 3., didapatkan bahwa parameter-parameter untuk model kredibilitas berdasarkan data terpancung untuk nilai $p = 0,2$ dan $q = 0,8$ lebih besar daripada model dengan nilai $p = 0,4$ dan $q = 0,6$ kecuali untuk faktor kredibilitas. Selanjutnya, dilakukan perhitungan premi kredibilitas pada kasus 3 untuk 5 individu pertama. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa premi kredibilitas untuk model dengan $p = 0,2$ dan $q = 0,8$ lebih besar daripada premi kredibilitas untuk model dengan $p = 0,4$ dan $q = 0,6$ untuk individu ke-1 dan ke-5, dan sebaliknya untuk individu ke-2,3 dan 4. Hal ini dikarenakan nilai faktor kredibilitas yang cukup besar untuk kedua model sehingga besar premi kredibilitas sangat dipengaruhi oleh besarnya *trimmed mean* empiris.

Perbandingan terhadap Model Kredibilitas Bühlmann dengan 1 *Outlier*

Pada bagian ini akan dilakukan perbandingan antara kedua model apabila salah satu besar kerugian untuk individu ke- i pada periode ke- j diganti dengan kerugian yang sangat besar (*outlier*). Misalkan besar kerugian asli untuk individu pertama pada tahun ke-18 yang awalnya bernilai 1.931.000 diganti dengan 50.000.000. Pertimbangkan model kredibilitas berdasarkan data terpancung dengan nilai $p = 0$ dan $q = 0,8$. Alasan dari pemilihan model ini adalah membuktikan bahwa model tidak terlalu terpengaruh terhadap kerugian yang terlalu besar apabila dibandingkan dengan model kredibilitas Bühlmann. Selanjutnya akan ditampilkan perbandingan premi antara kedua model dengan 1 *outlier*.

TABEL 4. Perbandingan premi kedua model dengan 1 outlier untuk 5 individu pertama

Model Kredibilitas Berdasarkan Data Terpancung, $p = 0$ dan $q = 0,8$			Model Kredibilitas Bühlmann		
Sebelum	Sesudah	Perubahan	Sebelum	Sesudah	Perubahan
1.324.189	1.324.189	0%	1.419.919	3.828.880	170%
1.707.424	1.707.424	0%	2.152.669	2.173.698	1%
18.981.144	18.981.144	0%	20.625.754	20.579.576	0%
3.244.839	3.244.839	0%	3.445.352	3.461.679	0%
6.190.970	6.190.970	0%	6.915.767	6.919.468	0%

TABEL 4. menunjukkan bahwa model kredibilitas berdasarkan data terpancung tidak terlalu terpengaruh terhadap *outlier* dibandingkan model kredibilitas Bühlmann. Hal ini dapat dilihat dari persentase perubahan besar premi untuk model kredibilitas berdasarkan data terpancung yang lebih kecil dari persentase perubahan besar premi untuk model kredibilitas Bühlmann. Perlu diperhatikan bahwa persentase perubahan besar premi dari model kredibilitas berdasarkan data terpancung untuk 30 individu sebesar 0%. Hal ini dikarenakan data kerugian yang diubah nilainya merupakan besar kerugian terurut ke-20 untuk individu pertama sedangkan model yang digunakan untuk perbandingan adalah model kredibilitas dengan $p = 0$ dan $q = 0,8$ dimana kerugian terurut yang digunakan dalam perhitungan besar premi hanyalah berupa kerugian terurut ke-1 sampai ke-16 sehingga tidak akan berpengaruh ke perhitungan besar premi setiap individu.

Selanjutnya, analisis dilakukan dengan mengubah besar kerugian asli untuk individu pertama pada periode ke-20 yang awalnya bernilai 1.125.000 diganti dengan 50.000.000. Berikut adalah hasil perbandingan premi antara kedua model untuk 5 individu pertama.

TABEL 5. Perbandingan premi kedua model dengan 1 *outlier* modifikasi untuk 5 individu pertama

Model Kredibilitas Berdasarkan Data Terpancung, $p = 0$ dan $q = 0,8$			Model Kredibilitas Bühlmann		
Sebelum	Sesudah	Perubahan	Sebelum	Sesudah	Perubahan
1.324.189	1.362.880	3%	1.419.919	3.868.868	172%
1.707.424	1.707.442	0%	2.152.669	2.173.684	1%
18.981.144	18.981.127	0%	20.625.754	20.579.641	0%
3.244.839	3.244.854	0%	3.445.352	3.461.670	0%
6.190.970	6.190.979	0%	6.915.767	6.919.474	0%

TABEL 5. menunjukkan bahwa persentase perubahan besar premi untuk model kredibilitas berdasarkan data terpancung untuk individu pertama sebesar 3% dan untuk model kredibilitas Bühlmann sebesar 172%. Dapat dilihat bahwa persentase perubahan besar premi kedua model untuk individu pertama lebih besar daripada hasil yang didapatkan pada TABEL 4. Namun, hal ini tidak mengubah kesimpulan yang sudah didapat bahwa persentase perubahan besar premi untuk model kredibilitas berdasarkan data terpancung lebih kecil dari persentase perubahan besar premi untuk model kredibilitas Bühlmann. Oleh karena itu, model kredibilitas dengan data terpancung masih tetap tidak terlalu terpengaruh (*robust*) terhadap *outlier* dibandingkan model kredibilitas Bühlmann.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa premi kredibilitas model berdasarkan data terpancung untuk individu ke- i diprediksi melalui penjumlahan berbobot antara *trimmed mean* empiris dan rata-rata dari *trimmed mean* empiris. Hasil numerik menunjukkan bahwa dengan menetapkan nilai $p > 0$ dan $q = 1$ maka *risk loading* dapat ditetapkan dimana *risk loading* adalah besar premi yang nilainya lebih besar dari premi dasar. Hasil perhitungan besar premi juga menunjukkan bahwa besar premi masing-masing individu semakin meningkat saat p meningkat. Selain itu, dengan menetapkan nilai p dan q dengan $0 \leq p < q < 1$ maka premi kredibilitas yang didapat tidak terlalu terpengaruh terhadap kerugian yang sangat besar (*outlier*). Analisis yang dilakukan dimana salah satu besar kerugian diganti dengan *outlier* menunjukkan bahwa model kredibilitas berdasarkan data terpancung lebih tidak terpengaruh terhadap *outlier* dibandingkan dengan model kredibilitas Bühlmann. Hal ini dapat dilihat dari persentase perubahan besar premi untuk model kredibilitas berdasarkan data terpancung ($p = 0$ dan $q = 0,8$) yang lebih kecil dari perubahan besar premi untuk model kredibilitas Bühlmann.

Penelitian selanjutnya disarankan untuk mengembangkan model kredibilitas berdasarkan data terpancung apabila didasarkan pada model kredibilitas Bühlmann-Straub, menerapkan teori kredibilitas multiperioda sehingga besarnya premi dapat diprediksi untuk lebih dari satu periode selanjutnya dan menentukan nilai p dan q untuk menghitung besar premi yang optimal di periode berikutnya dari suatu individu.

UCAPAN TERIMA KASIH

Kami ucapkan terima kasih untuk semua pihak yang telah memberikan bantuan diskusi maupun dukungan moril dalam penyelesaian artikel ini.

REFERENSI

- Bühlmann, H., & Gisler, A. (2005) *A course in credibility theory and its applications*. Berlin: Springer.
- Čížek, P. & Sadıkoğlu, S. (2020) ‘Robust nonparametric regression: a review’, *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 12(3), e1492.
- Conover, W.J. (1999) *Practical nonparametric statistics*. 3rd edn. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Hogg, R.V., McKean, J.W., & Craig, A.T. (2019) *Introduction to mathematical statistics*. 8th edn. United States: Pearson Education, Inc.
- Kim, J.H.T., & Jeon, Y. (2013) ‘Credibility theory based on trimming’, *Insurance: Mathematics and Economics*, 53(1), pp. 36-47.
- Klugman, S.A., Panjer, H.H., & Willmot, G.E. (2019) *Loss models: From data to decision*. 5th edn. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.
- Pitselis, G. (2013) ‘Quantile credibility models’, *Insurance: Mathematics and Economics*, 52(3), pp. 477-489.
- Staudte, R.G., & Sheather, S.G. (1990) *Robust estimation and testing*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Tsai, C.C.L., & Lin, T. (2017) ‘A Bühlmann credibility approach to modelling mortality rates’, *North American Actuarial Journal*, 21(2), pp. 204-227.
- Vaughan, E.J., & Vaughan, T.M. (2014) *Fundamentals of risk and insurance*. 11th edn. United States: John Wiley & Sons, Inc.
- Yustisia, T.V. (2014) *Kitab undang-undang hukum dagang*. 1st edn. Jakarta: Visimedia.