

Received: 30 October 2023
Revised: 14 December 2023
Accepted: 30 December 2023
Published: 31 December 2023

Ambang Batas Reasuransi Non-Proporsional Menggunakan *Tail Value-at-Risk* (TVaR) dari Distribusi Peluang Campuran

David Eurico^{1, a)}, Afifatul Ayu Astiani^{1, b)}, I Kadek Darma Arnawa^{1, c)}, Bagas Caesar Suherlan^{1, d)}, Utriweni Mukhaiyar^{1, e)}

¹*Program Studi Magister Aktuaria
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha no. 10, Bandung 40132, Indonesia*

E-mail: ^{a)}20822002@mahasiswa.itb.ac.id, ^{b)}20822008@mahasiswa.itb.ac.id,
^{c)}20822014@mahasiswa.itb.ac.id, ^{d)}20823013@mahasiswa.itb.ac.id, ^{e)}utriweni.mukhaiyar@itb.ac.id

Abstract

One of the tasks of banking institutions is to channel funds to the public through loan products. Banking institutions transfer the risk of non-performing loans to insurance companies and then partially reinsured to reinsurers. The purpose of this study is to determine the non-proportional reinsurance threshold based on the risk of loss of the 20% largest loan principal, using the Tail Value-at-Risk (TVaR) method. The threshold value will be estimated using a sample of 5,000 loans principal. The loan characteristics can be described by a Mixture Gamma Distribution consisting of components with different weights and parameters. The weights and parameters are 19% from the Gamma distribution with parameters $\alpha = 2.45$ and $\beta = 0.04$, 34.5% from Gamma with parameters $\alpha = 8.29$ and $\beta = 0.07$, and 46.5% from Gamma with parameters $\alpha = 30$ and $\beta = 0.13$. Analysis using TVaR produces a threshold value of 274.9 million rupiah. In real cases, if the claim value exceeds 274.9 million rupiah. The insurance company will bear a value of 274.9 million rupiah and the reinsurer will bear the difference in the size of the claim against the threshold limit.

Keywords: Non-proportional Reinsurance, Mixture Distribution, Risk, Tail Value at Risk, Threshold.

Abstrak

Salah satu tugas dari lembaga perbankan adalah menyalurkan dana ke masyarakat melalui produk pinjaman. Lembaga perbankan mengalihkan risiko ketidakmampuan pembayaran pinjaman kepada perusahaan asuransi dan kemudian direasuransikan sebagian kepada perusahaan reasuransi. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan ambang batas reasuransi non-proporsional yang berdasarkan risiko kerugian dari 20% pokok pinjaman terbesar, menggunakan metode Tail Value-at-Risk (TVaR). Nilai ambang batas tersebut akan diestimasi dengan menggunakan sampel sebanyak 5.000 pokok pinjaman. Karakteristik

pinjaman tersebut dapat dijelaskan melalui distribusi peluang Gamma campuran yang terdiri dari komponen-komponen dengan bobot dan parameter yang berbeda. Bobot dan parameter tersebut masing-masing adalah 19% dari distribusi Gamma dengan parameter $\alpha = 2.45$ dan $\beta = 0.04$, 34.5% dari Gamma dengan parameter $\alpha = 8.29$ dan $\beta = 0.07$, serta 46.5% dari Gamma dengan parameter $\alpha = 30$ dan $\beta = 0.13$. Analisis menggunakan TVaR menghasilkan nilai ambang batas sebesar 274.9 juta rupiah. Pada kasus nyata, bila nilai klaim melebihi 274.9 juta rupiah. Perusahaan asuransi akan menanggung nilai sebesar 274.9 juta rupiah dan reasuransi akan menanggung selisih besar klaim terhadap ambang batas tersebut.

Kata-kata kunci: Reasuransi Non-proporsional, Distribusi Campuran, Risiko, Tail Value at Risk, Ambang Batas.

PENDAHULUAN

Lembaga perbankan memiliki peran yang sangat penting dalam pertumbuhan dan perkembangan ekonomi di Indonesia. Undang-Undang Nomor 10 tahun 1998 tentang perubahan Undang-Undang Nomor 7 tahun 1992 tentang perbankan, menyebutkan fungsi utama perbankan Indonesia sebagai pengumpul dan penyalur dana masyarakat. Kegiatan bisnis yang dilakukan oleh bank dalam penghimpunan dana dapat berbentuk produk simpanan (tabungan, deposito, rekening giro), utang (jangka pendek, menengah, dan panjang), dan sumber dana lainnya. Di sisi lain, bank mengalirkan dana ke masyarakat dalam bentuk pemberian produk pinjaman (Sarif, 2019). Produk pinjaman adalah bentuk pemberian dana kepada masyarakat melalui peminjaman sejumlah uang dengan syarat yakni suatu jaminan dari peminjam dana atau debitur (Bahsan, 2007).

Bank memberikan pinjaman kepada debitur dalam jumlah yang besar maupun kecil, dan jumlah pokok pinjaman ini memiliki risiko masing-masing. Salah satu masalah yang sering dihadapi oleh bank adalah ketidakmampuan debitur untuk melunasi pinjamannya. Jika jumlah pinjaman yang bermasalah terus meningkat, hal ini akan berdampak buruk pada laporan keuangan dan kesehatan bank yang ditandai oleh meningkatnya rasio *Non-Performing Loans* atau kredit macet.

Untuk menghindari risiko ketidakmampuan pembayaran pinjaman akibat kematian debitur, bank mengambil langkah dengan berkolaborasi bersama perusahaan asuransi melalui asuransi kredit. Peraturan terkait asuransi kredit diatur dalam Peraturan Menteri Keuangan Nomor 124/PMK.010/2008. Dengan asuransi kredit, apabila terjadi situasi risiko yang mengakibatkan debitur tidak dapat melunasi utangnya, perusahaan asuransi selaku penanggung akan berkewajiban untuk membayar utang atau kewajiban sebesar sisa pinjaman pokok yang telah diasuransikan.

Selain perusahaan asuransi, reasuransi juga memegang peran penting sebagai penopang stabilitas sektor keuangan, karena perannya dalam perlindungan melalui pembagian risiko klaim yang ditanggung perusahaan asuransi. Perlindungan oleh reasuransi secara umum dibagi menjadi dua metode yaitu proporsional dan non-proporsional.

Pada kontrak reasuransi proporsional, perusahaan asuransi dan reasuransi sepakat untuk berbagi premi dan jumlah klaim secara proporsional sesuai dengan ketentuan dalam perjanjian. Di sisi lain, pada reasuransi non-proporsional, reasuransi dan perusahaan asuransi tidak berbagi proporsi premi dan klaim, melainkan menetapkan jumlah yang direasuransikan adalah selisih besar klaim di atas ambang batas tertentu atau retensi. Klaim dengan jumlah di bawah ambang batas akan sepenuhnya dibayar oleh perusahaan asuransi kepada bank, dan karena ini, setiap klaim akan memiliki proporsi yang berbeda satu sama lain sehingga disebut asuransi non-proporsional.

Penelitian ini bertujuan untuk mengestimasi ambang batas reasuransi non-proporsional yang mengakomodasi risiko kerugian berdasarkan 20% besar pokok pinjaman tertinggi dengan menggunakan sampel sebanyak 5.000 pokok pinjaman. Penulis merumuskan metodologi penelitian yang melibatkan dua elemen kunci yakni: distribusi campuran dan *Tail Value-at-Risk* (TVaR). Metodologi ini disusun dengan mempertimbangkan relevansi terhadap kondisi industri agar informasional dan responsif terhadap kondisi risiko yang penuh ragam dan berubah setiap waktu. Pemanfaatan metode TVaR sebagai metode perhitungan ambang batas yang berkesesuaian dengan

toleransi risiko pada tujuan penelitian. Distribusi campuran digunakan sebagai pengembangan pada pengolahan sampel karena mampu mengakomodasi kompleksitas dan heterogenitas karakteristik data.

Distribusi peluang campuran tidak jarang digunakan dalam bidang asuransi. Sattayatham dan Talangtam (2011) menerapkan distribusi peluang campuran untuk data klaim asuransi kendaraan bermotor dan menyimpulkan distribusi campuran yang dibatasi oleh distribusi Log-normal sesuai untuk data tersebut. Selain itu, Miljkovic dan Grün (2016) menggunakan distribusi peluang campuran dari keluarga distribusi non-Gaussian untuk memodelkan kerugian asuransi kebakaran di Denmark. Hasil penelitian mereka selanjutnya mengonfirmasi bahwa pendekatan distribusi peluang campuran efektif dalam pemodelan prediktif dan evaluasi risiko dalam konteks data asuransi.

TVaR adalah salah satu ukuran risiko yang populer dalam pemodelan risiko selain *Value-at-Risk* (VaR). Keefektifan ukuran risiko dinilai berdasarkan pemenuhan aksioma koheren, termasuk invariansi translasi, homogenitas positif, monotonisitas, dan subaditivitas (Tse, 2009). Metode VaR hanya memenuhi tiga aksioma koheren, yaitu invariansi translasi, homogenitas positif, dan monotonisitas, sementara aksioma subaditivitas tidak terpenuhi. Sebaliknya, metode TVaR dianggap mampu mengatasi masalah yang timbul dalam metode VaR. Penelitian yang menggunakan metode TVaR dalam konteks reasuransi optimal telah dilakukan dengan mengemukakan bahwa reasuransi optimal dapat ditentukan berdasarkan tindakan risiko TVaR (Lu *et al.*, 2016). Selain itu, metode TVaR juga dikenal sebagai *Conditional Tail Expectation* (CTE), yang lebih umum dalam penggunaannya. Syuhada *et al.* (2021) telah mengilustrasikan penggunaan metode optimisasi berbasis CTE dalam mengevaluasi kombinasi reasuransi *stop-loss* dan *quota-share*.

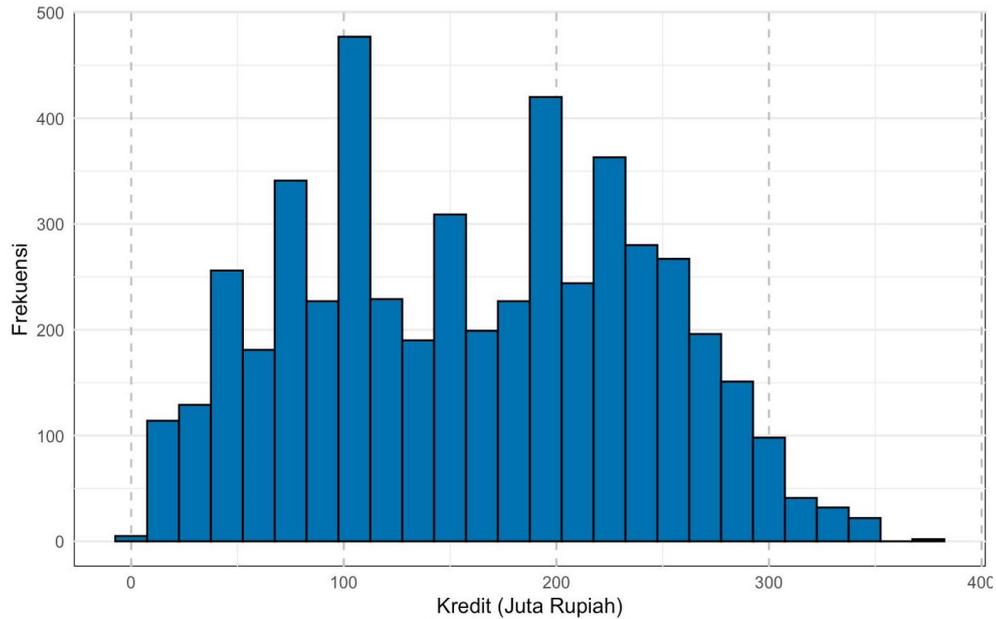
METODOLOGI

Bahan dan Data

Penelitian ini akan memanfaatkan sampel sebanyak 5,000 kredit. TABEL 1 memberikan hasil statistika deskriptif dan GAMBAR 1 menyajikan histogram dari sampel. Sampel disimpulkan memiliki bentuk cukup simetris yang didukung oleh mean dan median yang tidak jauh berbeda serta nilai skewness yang mendekati nol. Variabilitas dari sampel terindikasi cukup besar karena nilai koefisien variasi (standar deviasi terhadap mean) yang bernilai hampir 50%.

TABEL 1. Statistika Deksriptif Sampel Penelitian

Statistik	Nilai
Mean	Rp160,967,061
Median	Rp160,000,000
Standar Deviasi	Rp79,686,750
Range	Rp369,000,000
Skewness	0.05
Kurtosis	-1.01



GAMBAR 1. Histogram Sampel Penelitian

Metode Penelitian

Tahapan analisis yang ditetapkan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Pencocokan distribusi peluang campuran sampel penelitian
2. Estimasi parameter dari distribusi peluang campuran
3. Estimasi nilai VaR dari distribusi peluang campuran
4. Penentuan batas ambang reasuransi non-proporsional menggunakan TVaR

Distribusi Peluang Campuran

Hasil dari percobaan statistik merupakan kumpulan dari kejadian-kejadian yang tidak tentu. Ketidakpastian dalam hasil percobaan ini menunjukkan bahwa pemodelan terbaik adalah pemodelan probabilistik, di mana setiap peristiwa tertentu memiliki nilai probabilitasnya sendiri. Untuk memungkinkan hal ini terjadi, percobaan harus didefinisikan dalam bentuk variabel acak untuk melihat dan melakukan kuantifikasi setiap hasil kejadian berdasarkan karakteristik dari kejadian tertentu. Setiap kejadian memiliki nilai peluangnya sendiri dan membentuk suatu susunan probabilitas yang disebut distribusi peluang. Secara rinci, Walpole et al. (2016) menyatakan bahwa himpunan pasangan terurut $(x, f(x))$ adalah distribusi peluang dari variabel acak diskrit acak X jika,

$$P(X = x) = f_x(x). \tag{1}$$

untuk $f_x(x)$ disebut fungsi massa peluang (*probability mass function* atau PMF). Fungsi distribusi kumulatif (*cumulative density function* atau CDF) untuk variabel acak X adalah

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f_x(t), \quad -\infty < x < \infty \tag{2}$$

Sedangkan untuk variabel acak X yang kontinu, $f_x(x)$ disebut fungsi densitas peluang (*probability density function* atau PDF) yang memenuhi sifat berikut.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_x(x) dx \tag{3}$$

Fungsi distribusi kumulatif untuk variabel acak X yang kontinu adalah sebagai berikut.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad (4)$$

Pada kenyatannya, seringkali beberapa kasus dari beragam eksperimen statistik memberikan hasil yang serupa secara karakteristik peluangnya sehingga Walpole *et al.* (2016) menyatakan bila jenis variabel acak yang terkait dengan percobaan-percobaan tersebut dapat digambarkan sebagai distribusi peluang yang sama dan dapat dinyatakan dengan rumus yang sama. Sebagai contoh adalah distribusi peluang gamma yang digunakan dalam penelitian keuangan, distribusi eksponensial yang digunakan dalam waktu antar kedatangan kejadian, dan distribusi hipergeometri yang secara luas umum digunakan di pengamanan kualitas (*quality assurance*) pada industri.

Suatu percobaan dapat memiliki suatu nilai sebagai representasi yakni nilai ekspektasi (μ). Nilai ekspektasi adalah nilai yang dapat diantisipasi atau rata-rata dari percobaan statistik. Nilai ekspektasi diperoleh dari penjumlahan seluruh perkalian nilai yang memungkinkan dari suatu percobaan statistik dengan peluangnya. Secara matematis, nilai ekspektasi dari X adalah,

$$\mu = E[X] = \sum_x x f_X(x) \quad (5)$$

untuk X adalah variabel acak diskrit. Nilai ekspektasi untuk variabel acak kontinu dapat diperoleh dengan menggunakan integral antiderivatif maupun dengan integral Riemann.

Suatu kejadian dapat mengandung nilai-nilai dengan karakteristik yang saling berbeda. Peristiwa ini memungkinkan dilakukannya klasifikasi nilai-nilai tersebut ke berbagai kelas dengan karakteristiknya masing-masing. Klasifikasi ini mengumpulkan nilai-nilai yang memiliki karakteristik yang sama ke dalam sebuah kelas sehingga nilai-nilai ini akan membentuk pola yang unik untuk kelas tersebut. Bersamaan dengan ini, setiap kelas mungkin memiliki pola yang berbeda dari kelas lain karena berbedanya karakteristik. Ketika semua kelas dikumpulkan dan diamati secara keseluruhan, ada kemungkinan bahwa kejadian tertentu akan memiliki dua atau lebih modus. Peristiwa ini dapat dimodelkan melalui distribusi peluang multimodal.

Ketika informasi tentang klasifikasi disediakan atau asumsi setiap kelas diperlakukan secara independen, sampel penelitian dapat dipisahkan dan ditangani secara individual. Namun jika tidak ada informasi tersebut, maka tidak mungkin untuk secara paksa memperlakukan data dengan distribusi unimodal. Salah satu solusi untuk menangani jenis data ini adalah dengan mempertimbangkan distribusi peluang campuran.

Distribusi peluang campuran dari variabel acak X dengan fungsi densitas peluang $f_X(x)$ dapat disusun dari kombinasi linear sebanyak n komponen dengan fungsi densitas peluang $f_{X_i}(x_i)$ dengan *support* yang sama. Setiap komponen fungsi densitas peluang dikalikan dengan p_i , yakni proporsi dari distribusi X_i terhadap X dan $0 \leq p_i \leq 1$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Thompson (2006) menyatakan bahwa distribusi yang ada di dalam distribusi campuran diperbolehkan berasal dari keluarga distribusi yang berbeda namun umumnya, perhitungan setelahnya akan menjadi terlalu rumit. Oleh karena itu, dalam kebanyakan kasus distribusi campuran, semua distribusi peluang yang terlibat berasal dari satu keluarga tetapi memiliki nilai parameter yang berbeda-beda.

Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi campuran adalah penerapan Persamaan (4) tetapi menggunakan fungsi densitas peluang dari distribusi campuran yang telah dijelaskan sebelumnya. Pernyataan ini ditunjukkan berikut.

$$\begin{aligned}
 F_X(x; \vec{\theta}) &= \int_{-\infty}^x f_X(t; \vec{\theta}) dt \\
 &= \int_{-\infty}^x \sum_{i=1}^n p_i f_{X_i}(t; \theta_i) dt \\
 &= \sum_{i=1}^n p_i \int_{-\infty}^x f_{X_i}(t; \theta_i) dt \\
 &= \sum_{i=1}^n p_i F_{X_i}(x; \theta_i)
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Persamaan (6) menginterpretasikan CDF dari distribusi campuran adalah kombinasi linear dari CDF $F_{X_i}(x_i; \theta_i)$ sebanyak n komponenyang berkorespondensi dengan variabel acak X_1, X_2, \dots, X_n dengan bobot p_1, p_2, \dots, p_n .

Maximum Likelihood Fuction (MLE)

Pertimbangkan situasi yakni sampel sebanyak k $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ dan distribusi peluang sampel tersebut diketahui tetapi nilai parameter-parameternya yakni $\vec{\theta}$ tidak diketahui. Estimasi parameter $\vec{\theta}$ yang nilainya tidak diketahui dapat menggunakan metode MLE. Metode MLE mengestimasi nilai parameter $\vec{\theta}$ yang memaksimalkan fungsi *likelihood* $L(\vec{\theta})$ yang ditunjukkan pada Persamaan (7).

$$\vec{\theta} = \arg \max L(\vec{\theta})
 \tag{7}$$

Hogg *et al.* (2013) mendefinisikan fungsi *likelihood* untuk suatu distribusi peluang dengan PDF $f_X(x)$ sebagai,

$$L(\vec{\theta}, \vec{x}) = \prod_{i=1}^k f_X(x_i; \vec{\theta})
 \tag{8}$$

Ghojogh *et al.* (2019) kemudian mendifinisikan kembali fungsi *likelihood* untuk kasus distribusi peluang campuran dengan memanfaatkan kombinasi linear fungsi densitas menjadi

$$L(\vec{\theta}, \vec{x}) = \prod_{i=1}^k \left[\sum_{j=1}^n p_j f_{X_j}(x_i; \theta_j) \right]
 \tag{9}$$

Kedua peneliti melakukan operasi logaritmik terhadap fungsi *likelihood* dibandingkan langsung menggunakan fungsi *likelihood* dikarenakan kemudahannya untuk dikerjakan secara matematis pada tahapan MLE yang selanjutnya. Notasikan fungsi *log-likelihood* sebagai $l(\vec{\theta}; \vec{x})$ maka

$$\begin{aligned}
 l(\bar{\theta}; \bar{x}) &= \log L(\bar{\theta}; \bar{x}) \\
 &= \log \prod_{i=1}^k \left[\sum_{j=1}^n p_j f_{X_j}(x_i; \bar{\theta}_j) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^k \log \sum_{j=1}^n p_j f_{X_j}(x_i; \bar{\theta}_j)
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Perhatikan bahwa permasalahan pada Persamaan (10) menjadi permasalahan pengestimasi parameter $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_n$ dan bobot p_1, p_2, \dots, p_n . Persamaan (7) menginformasikan bahwa estimasi parameter metode MLE merupakan permasalahan optimasi dan akan membutuhkan titik kritis sebagai solusi permasalahan. Untuk kasus distribusi campuran, permasalahan optimasi ini akan berkembang menjadi

$$\bar{\theta}, \bar{p} = \arg \max l(\bar{\theta}; \bar{p}),
 \tag{11}$$

yang terbatas oleh $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ dan $0 \leq p_j \leq 1$.

Hadirnya penjumlahan pada fungsi logaritma di Persamaan (10) menyebabkan permasalahan optimasi sulit diselesaikan. Algoritma *Expectation Maximisation* (EM) merupakan salah satu metode yang dapat digunakan dalam menyelesaikan permasalahan optimasi tersebut. Pembaca dapat merujuk Ghogh et al. (2019) dan Thompson (2006) untuk materi EM yang lebih spesifik.

Tail Value at Risk (TVaR)

Evaluasi risiko adalah hal yang penting saat bekerja dengan kejadian maupun data yang berkaitan ekonomi. Tse (2009) menyatakan salah satu ukuran risiko yang paling banyak digunakan adalah *Value-at-Risk* (VaR) yang didefinisikan sebagai fungsi kuantil,

$$VaR_{\delta}(X) = F_X^{-1}(\delta) = x_{\delta},
 \tag{12}$$

dengan δ adalah nilai peluang yang memenuhi $0 < \delta < 1$. Sederhananya, VaR dari variabel acak (kerugian) adalah nilai supremum dari distribusi peluang sedemikian rupa sehingga peluang kerugian yang lebih besar dari nilai tertentu (yang dianggap “berbahaya”) ini akan lebih besar dari δ . Nilai peluang δ biasanya mewakili kemampuan suatu institusi untuk menanggung risikonya dan dianggap mendekati 1, sehingga probabilitas kerugian X yang melebihi $VaR_{\delta}(X)$ diharapkan kurang dari $1 - \delta$.

Perhatikan bahwa Persamaan (12) adalah formula untuk VaR untuk distribusi peluang unimodal. Meskipun CDF untuk distribusi peluang campuran pada Persamaan (6) terlihat sederhana, diperlukan perhitungan yang cukup sulit untuk mendapatkan fungsi kuantil dari distribusi peluang campuran. Penelitian Castellacci (2012) telah mengekspresikan fungsi kuantil dari distribusi peluang campuran. Untuk G adalah notasi dari CDF distribusi peluang campuran serta G_1, G_2, \dots, G_n dan $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ menyatakan CDF dan bobot masing-masing komponen, maka fungsi kuantilnya adalah

$$G^{-1}(\theta) = G_1^{-1}\left(\frac{\theta}{\pi_1}\right)_{B_1(\theta)} + G_2^{-1}\left(\frac{\theta - \pi_1}{\pi_2}\right)_{B_2(\theta)} + \dots + G_n^{-1}\left(\frac{\theta - \sum_{i=1}^n \pi_i}{\pi_n}\right)_{B_n(\theta)}, \tag{13}$$

untuk $B_i := \left[\sum_{j=0}^{i-1} \pi_j, \sum_{j=0}^i \pi_j \right)$ dan $B_n := \left[\sum_{j=0}^{i-1} \pi_j, 1 \right)$ serta $\pi_0 = 0$. Notasi $B_i(\theta)$ menyatakan fungsi indikator pada himpunan B_i . Fungsi indikator mengindikasikan bila θ merupakan elemen dari himpunan B_i maka fungsi yang terikat oleh indikator tersebut adalah fungsi itu sendiri dan sebaliknya, akan bernilai nol bila di luar himpunan B_i . Sebagai contoh untuk $G_1^{-1}\left(\frac{\theta}{\pi_1}\right)_{B_1(\theta)}$ adalah

$$G_1^{-1}\left(\frac{\theta}{\pi_1}\right)_{B_1(\theta)} = \begin{cases} G_1^{-1}\left(\frac{\theta}{\pi_1}\right) & , \theta \in B_1, \\ 0 & , \theta \notin B_1 \end{cases} \tag{14}$$

dan berlaku untuk G_i berikutnya.

Salah satu kelemahan dari ukuran risiko VaR adalah mengabaikan nilai-nilai di luar titik VaR karena hanya mengevaluasi nilai-nilai hingga titik yang terhubung dengan nilai peluang δ . Solusi untuk mengevaluasi risiko di luar nilai VaR adalah *Tail Value-at-Risk* (TVaR). Metode ini juga dikenal sebagai *Conditional Tail Expectation* (CTE), yang didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} CTE_\delta(x) &= E[X | X > VaR_\delta(X)] \\ &= \frac{1}{1 - \delta} \int_{VaR_\delta(X)}^\infty x dF_X(x) \\ &= \frac{1}{1 - \delta} \int_\delta^1 VaR_\zeta d\zeta \\ &= TVaR_\delta(X). \end{aligned} \tag{15}$$

Nama lain dari metode ini adalah *mean shortfall* karena sifatnya yang mengevaluasi nilai ekspektasi dari kerugian pada tingkat peluang $1 - \delta$.

Salah satu temuan menarik adalah bahwa nilai TVaR akan setidaknya sama atau lebih besar dari VaR untuk sampel yang sama atau

$$TVaR_\delta(X) \geq VaR_\delta(X). \tag{16}$$

Temuan ini dibahas secara spesifik oleh Gourieroux dan Liu (2012) dan mereka menjelaskan temuan ini yakni karena VaR hanya mengembalikan satu nilai tertentu yang sesuai dengan tingkat probabilitas δ yakni kuantil ke- δ dan mengabaikan nilai-nilai di luarnya sementara TVaR dalam konteks ukuran pengukuran risiko mengembangkan VaR dengan mempertimbangkan kerugian di luar VaR dalam bentuk nilai harapan atau ekspektasi. Pembaca dapat merujuk penelitian Gourieroux dan Liu (2012) untuk pembuktian pada beberapa distribusi peluang kontinu. Irsan and Sirait (2020) juga telah melakukan pembuktian ini pada beberapa harga saham yang terdaftar di indeks LQ45.

Secara implisit, penggunaan TVaR dapat dilihat sebagai alternatif untuk melonggarkan VaR yang lebih ketat tetapi tetap mempertimbangkan prinsip-prinsip pengukuran risiko sehingga dapat menjadi ukuran pengukuran risiko yang lebih baik dalam beberapa kasus.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hal yang menarik dari histogram pada GAMBAR 1 adalah keberadaan modus (puncak) sebanyak lebih dari satu. Hal ini mengisyaratkan bahwa model pokok pinjaman bank cenderung lebih sesuai untuk dimodelkan sebagai distribusi multimodal daripada distribusi unimodal klasik. Pemodelan distribusi multimodal cenderung lebih sering dimodelkan oleh distribusi peluang campuran.

Penelitian ini dimulai dengan melakukan pencocokan distribusi pokok pinjaman dengan menggunakan metode MLE untuk pengestimasiannya. Kandidat dari distribusi peluang campuran yang digunakan adalah model campuran distribusi kontinu unimodal dasar yang umum digunakan untuk memodelkan pokok pinjaman, yaitu distribusi campuran Gamma, distribusi campuran Lognormal, dan distribusi campuran Weibull. Distribusi campuran Normal tidak dipertimbangkan karena mendukung nilai negatif sedangkan pokok pinjaman yang bersatuan mata uang selalu lebih besar dari nol.

Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, permasalahan optimisasi dalam MLE sulit dilakukan secara manual karena tingkat kompleksitasnya. Pencocokan distribusi dan pengestimasi parameter (beserta bobot p_i) dilakukan melalui bahasa pemrograman R (melalui IDE Rstudio) dengan hasil untuk masing-masing kandidat distribusi ditunjukkan pada TABEL 2, TABEL 3, dan TABEL 4.

TABEL 2. Pencocokan Pokok Pinjaman ke Distribusi Campuran Gamma Sebanyak 2 dan 3 Komponen Beserta Estimasi Parameter

I	2 Komponen ($n = 2$)		3 Komponen ($n = 3$)		
	1	2	1	2	3
p_i	0.607	0.393	0.190	0.345	0.465
α_i (parameter <i>shape</i>)	2.985	31.253	2.454	8.290	30.003
β_i (parameter <i>rate</i>)	0.026	0.135	0.036	0.071	0.130
AIC	57,276.85		57,198.65		

TABEL 3. Pencocokan Pokok Pinjaman ke Distribusi Campuran Lognormal Sebanyak 2 dan 3 Komponen Beserta Estimasi Parameter

I	2 Komponen ($n = 2$)		3 Komponen ($n = 3$)		
	1	2	1	2	3
p_i	0.584	0.416	0.118	0.458	0.424
μ_i	4.549	5.410	3.750	8.290	5.435
σ_i^2	0.657	0.185	0.726	0.414	0.176
AIC	57,638.77		57,215.88		

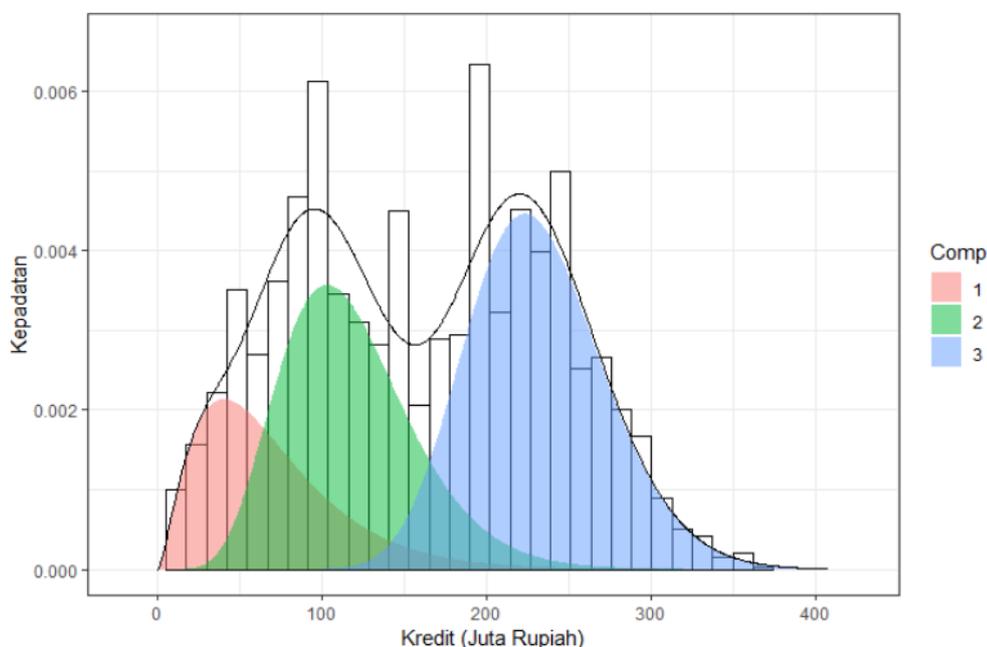
TABEL 4. Pencocokan Pokok Pinjaman ke Distribusi Campuran Weibull Sebanyak 2 dan 3 Komponen Beserta Estimasi Parameter

I	2 Komponen ($n = 2$)		3 Komponen ($n = 3$)		
	1	2	1	2	3
p_i	0.431	0.569	0.522	0.195	0.283
α_i (parameter <i>shape</i>)	2.201	4.579	2.121	7.328	5.496
β_i (parameter <i>rate</i>)	99.920	236.055	112.970	223.975	259.142
AIC	57,231.75		57,218.82		

Pemilihan distribusi yang terbaik akan didasari oleh *Akaike Information Criterion* (AIC) dengan formulasi sebagai berikut.

$$AIC = -2l(\hat{\theta}) + 2k . \tag{17}$$

Model dengan nilai AIC terendah dianggap sebagai model terbaik yang sesuai dengan data (Bozdogan, 1987). Hal ini sangat jelas karena MLE bertujuan untuk memaksimalkan fungsi *log-likelihood*, sehingga fungsi yang memberikan nilai tertinggi akan mencerminkan kesesuaian yang lebih baik. Persamaan (17) menyatakan AIC sebanding dengan nilai negatif dari fungsi *log-likelihood*, maka model terbaik adalah model dengan nilai AIC yang serendah mungkin. Model yang dipilih adalah distribusi campuran Gamma dengan 3 komponen dan parameter p_i , α_i , dan β_i untuk $i=1,2,3$ seperti yang tercantum dalam TABEL 2 karena memiliki nilai AIC yang paling rendah dibanding lima kandidat lainnya. TABEL 2 menunjukkan grafik untuk fungsi densitas peluang dari distribusi campuran Gamma.



GAMBAR 2. Grafik Distribusi Gamma Campuran terhadap Histogram Sampel

TVaR sebagai model untuk menentukan ambang batas yang ditulis pada Persamaan (15) memerlukan nilai VaR terlebih dahulu. VaR untuk distribusi peluang campuran telah ditunjukkan pada Persamaan (13) maka VaR untuk distribusi peluang campuran pokok pinjaman yakni Gamma 3 komponen adalah

$$\begin{aligned}
 F_X^{-1}(\theta) &= F_{X_1}^{-1}\left(\frac{\theta}{p_1}\right)_{B_1(\theta)} + F_{X_2}^{-1}\left(\frac{\theta - p_1}{p_2}\right)_{B_2(\theta)} + F_{X_3}^{-1}\left(\frac{\theta - p_1 - p_2}{p_3}\right)_{B_3(\theta)} \\
 &= F_{X_1}^{-1}\left(\frac{\theta}{0.190}\right)_{B_1(\theta)} + F_{X_2}^{-1}\left(\frac{\theta - 0.190}{0.345}\right)_{B_2(\theta)} + F_{X_3}^{-1}\left(\frac{\theta - 0.535}{0.465}\right)_{B_3(\theta)}.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Himpunan B_i untuk Persamaan (18) masing-masing adalah $[0,0.19)$, $[0.19,0.535)$, dan $[0.535,1]$. Persamaan (18) kemudian dapat disederhanakan kembali menjadi seperti di bawah ini.

$$F_X^{-1}(\theta) = \begin{cases} F_{X_1}^{-1}\left(\frac{\theta}{0.19}\right), & 0 \leq \theta < 0.19 \\ F_{X_2}^{-1}\left(\frac{\theta - 0.19}{0.345}\right), & 0.19 \leq \theta < 0.535, \\ F_{X_3}^{-1}\left(\frac{\theta - 0.535}{0.465}\right), & 0.535 \leq \theta \leq 1 \end{cases} \quad (19)$$

Nilai θ dipilih adalah 80% berdasarkan ketentuan yang telah dijelaskan pada pendahuluan. Nilai $VaR_{0.8}(X)$ berdasarkan Persamaan (19) adalah,

$$VaR_{0.8}(X) = F_{X_3}^{-1}\left(\frac{0.8 - 0.535}{0.465}\right) = 236.0896, \quad (20)$$

atau sebesar 236,1 juta rupiah. Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, penggunaan nilai VaR hanya berfokus pada satu titik, namun tidak pada sifat ekor distribusi yang memiliki nilai pokok pinjaman yang dianggap “berbahaya” maka setelah mendapatkan nilai VaR, nilai TVaR dapat dihitung berikut.

$$\begin{aligned} TVaR_{0.8}(X) &= E[X | X > 236.0896] \\ &= \frac{1}{0.2} \int_{236.0896}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= 274.8675 \end{aligned} \quad (21)$$

Secara analitis, nilai TVaR adalah nilai ekspektasi X bersyarat X lebih besar dari 80% pokok pinjaman, dalam hal ini adalah $VaR_{0.8}(X)$. Nilai TVaR sebesar 274,9 juta rupiah adalah ambang batas yang akan ditetapkan dalam kontrak reasuransi non-proporsional. Nilai ini kemudian dapat digunakan secara praktikal pada situasi jika jumlah pokok pinjaman yang diberikan kepada calon debitur melebihi 274,9 juta rupiah, risiko dari pokok yang melebihi ambang batas akan dialihkan ke reasuransi. Sebaliknya, jika pokok pinjaman tertentu lebih rendah dari 274,9 juta rupiah, maka risiko dari pinjaman ini sepenuhnya ditanggung perusahaan asuransi.

KESIMPULAN DAN SARAN

Penelitian ini menggunakan metode TVaR untuk menghitung ambang batas reasuransi non-proporsional produk asuransi kredit. Data yang tersedia ditemukan memiliki lebih dari satu mode, sehingga proposisi model distribusi campuran untuk menyesuaikan distribusi pokok pinjaman. Hasil pencocokan distribusi menggunakan R menunjukkan bahwa distribusi Gamma campuran dengan 3 komponen adalah model terbaik untuk pokok pinjaman. Juga dengan metode TVaR, ambang batas untuk reasuransi non-proporsional adalah 274,9 juta rupiah. Setiap pinjaman dengan pokok yang melebihi ambang batas akan memiliki risiko kerugian pada pokok yang melebihi ambang batas dialihkan ke reasuransi. Oleh karena itu, distribusi campuran dapat digunakan untuk memodelkan data seperti pokok pinjaman, dan metode TVaR dapat digunakan sebagai metode untuk mendapatkan batas ambang berdasarkan risiko kerugian pada pokok. Ambang batas yang telah diperoleh sebelumnya dapat digunakan sebagai referensi untuk pelaksanaan reasuransi. Seseorang dapat membandingkan

ambang batas ini dengan data sejarah klaim seperti jumlah dan jumlah klaim rata-rata. Informasi tambahan tentang karakteristik debitur seperti usia, jenis kelamin, pekerjaan, tanggal pemberian pinjaman, dan lain-lain akan lebih membantu dalam pengambilan keputusan.

REFERENSI

- Bahsan, M. 2007, *Hukum Jaminan Dan Jaminan Kredit Perbankan Indonesia*, Jakarta: PT. Raja Grafindo Persada.
- Bozdogan, H., 1987, Model selection and Akaike's Information Criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions, *Psychometrika*, Vol. 52 No. 3, hh. 345-370.
- Castellacci, G., 2012, A Formula for the Quantiles of Mixtures of Distributions with Disjoint Supports, *SSRN Electronic Journal*, hh. 1-11.
- Gourieroux, C. & Liu, W., 2012, Converting Tail-VaR to VaR: An Econometric Study, *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 10 No. 2, hh. 233-264
- Ghojogh, B., Ghojogh, A., Crowley, M. & Karray, F., 2019, Fitting A Mixture Distribution to Data: Tutorial.
- Hogg, R. V., McKean, J.W. & Craig, A.T., 2013, *Introduction to Mathematical Statistics*, Hoboken: Pearson Education Inc.
- Irsan, M.Y.T.I. & Sirait, M.L., 2020, VALUE AT RISK (VaR) & TAILED VALUE AT RISK (TVaR): COMPANIES LISTED IN LQ45, *International Journal of Economics, Commerce and Management*, Vol. 8 No. 12. hh. 560-568.
- Lu, Z., Meng, L., Wang, Y. & Shen, Q., 2016, Optimal reinsurance under VaR and TVaR risk measures in the presence of reinsurer's risk limit, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 68, hh. 92-100.
- Miljkovic, T. & Grün, B., 2016, Modeling loss data using mixtures of distributions, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 70, hh. 387-396.
- Sarif, A., 2019, Implikasi Hukum Klausuka Asuransi Jiwa dalam Perjanjian Kredit Perbankan, *Halu Oleo Law Review*, Vol. 3 No. 2, hh. 299-313.
- Sattayatham, P. & Talangtam, T., 2011, Fitting of finite mixture distributions to motor insurance claims, *Journal of Mathematics and Statistics*, Vol. 8 No. 1, hh. 49-56.
- Syuhada, K., Hakim, A. & Sari, S., 2021, The combined stop-loss and quota-share reinsurance: conditional tail expectation-based optimization from the joint perspective of insurer and reinsurer, *Risks*, Vol. 9 No. 7, hh. 125-150.
- Thompson, M., 2006, Mixture Models for Describing Multimodal Data, *AMC (Analytical Methods Committee) Technical Brief*.
- Tse, Y.K., 2009, *Nonlife Actuarial Models: Theory, Methods and Evaluation, Nonlife Actuarial Models: Theory, Methods and Evaluation*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Walpole, R.E., Myers, R.H., Myers, S.L. & Ye, K., 2016, *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*, 9th ed., Boston: Pearson Education Inc.